Nível 1

1. *Um fabricante de sabão em pó embalava o produto em caixas de papel com* $5\,cm \times 16\,cm \times 24\,cm$*...*

Desconsiderando o fato de que partes do papel se sobrepoem em algumas partes da caixa, podemos considerar que a quantidade de papel em cada caixa é o produto da área total das faces da caixa pela densidade (gramatura) do papel, e a quantidade economizada de papel é proporcional à diminuição da área da superfície para o novo formato. Como a caixa tem três pares de faces retangulares, temos, em cm^2,

Área da caixa original $= 2 \cdot (5 \cdot 16 + 5 \cdot 24 + 16 \cdot 24) = 2 \cdot (80 + 120 + 384)$

Área da nova caixa $= 2 \cdot (8 \cdot 20 + 8 \cdot 12 + 20 \cdot 12) = 2 \cdot (160 + 96 + 240)$

A diferença entre as duas é $2 \cdot (-80 + 24 + 144) = 2 \cdot 88 = 176\ \text{cm}^2 = 0,0176\ \text{m}^2$, que ($\times$ 300g/m^2) corresponde a 5,28g por caixa. Em um ano esta quantidade é economizada 1.000.000 de vezes, o que corresponde a 5280 kg ou 5,28 toneladas de papel.

2. *Como prêmio por algumas tarefas realizadas, Dona Zuleide deu aos filhos, André, Beto, e Carlos...*

(a) R$ 7,50 resultam em 15 bolinhas. Acrescentando uma bolinha de Daniel, tem-se 16 bolinhas. Segundo as instruções elas são repartidas: 8 para André, 4 para Beto e 2 para Carlos, sobrando duas bolinhas para Daniel. Como ele já tinha emprestado uma, na verdade só ganhou uma.

(b) Para seguir as instruções de D. Zuleide, é preciso dividir a quantidade de bolas por 2 por três vezes, ou seja o número precisa ser divisível por 8. Dividindo 2011 por 8 sobram 3, então Daniel precisaria acrescentar 5 bolinhas, pelo menos, para obter o próximo múltiplo de 8. restariam ao final 1/8 das 2016 bolinhas, ou seja, 252. Descontando as 5 acrescentadas Daniel ganharia 247 bolinhas.

3. *João recebeu a tarefa de armazenar* 6850 *CDs em caixas com a condição de que todas as caixas...*

(a) Utilizando só caixas grandes, sem a condição do problema, teríamos $6850 \div 70 = 97$ e sobram 60 CDs, que caberiam em mais uma caixa e então é ímpossível cumprir a tarefa com menos que 98 caixas. Pode-se, então, utilizar 96 caixas grandes e sobram 130 CDs, que cabem exatamente em duas caixas médias. Assim o mínimo é de 98 caixas.

(b) Sejam p, m e g as quantidades de caixas de cada tipo utilizadas, respectivamente, pequenas, médias e grandes. João utilizou $p + m + g = 100$, enquanto que $50p + 65m + 70g = 6850$. Dividindo esta última equação por 5 e multiplicando a primeira por 10, obtemos $10p+10m+10g = 1000$ e $10p+13m+14g = 1370$, de onde $3m + 4g = 370$. Como $370 = 4 \cdot 92 + 2 = 4 \cdot 91 + 6$, conclui-se que o maior valor possível para g é 91.

4. *Uma avenida de mão dupla possui dois semáforos, A e B, distantes* 400 *metros um do outro...*

(a) 60 km em 1h dá 1 km a cada minuto (60s) ou 400 m em 24s.

(b) Para os veículos indo de A para B, o semáforo B tem que estar aberto no máximo 24s após a abertura de A e pelo menos até 24s depois de A ficar vermelho. Além disso, quem vem no sentido oposto e passa por B a partir de 24s antes da abertura de A e até 24s antes do fechamento de A precisa encontrar B aberto. Em outras palavras B só pode ficar vermelho de 24s antes do fechamento de A (o que equivale a 6s após a abertura de A) até 24s depois da abertura de A, o que dá 18s, no máximo.

5. *Uma folha retangular de papel é dobrada ao longo da linha tracejada...*

Note que, dividindo o quadrado $ACDE$ em dois retângulos idênticos por uma reta passando por M e paralela a AC é imediato concluir que a diagonal CM tem a mesma medida de DM que é o mesmo que DC. Ou seja, o triângulo CDM é equilátero e seus ângulos internos são todos iguais a $60°$. Por causa da dobra, o triângulo DMB é o mesmo que o triângulo DCB tem-se, então $C\widehat{D}B = B\widehat{D}M = C\widehat{D}M/2 = 30°$ e $D\widehat{M}B = 90°$. De onde não é difícil concluir que $D\widehat{B}M = 60°$.

6. *Dos números terminados em 3 entre 0 e 100, quantos não são múltiplos de 3 e nem primos? E ...*

Um número composto terminado em 3 é necessariamente o produto de um número terminado em 3 por outro terminado em 1 (basta verificar as possibilidades para o produto entre dois algarismos ímpares). O menor desses produtos que não tem fatores múltiplos de 3 é $13 \times 11 = 143$. Portanto, abaixo de 100, todos os números terminados em 3 que não são múltiplos de 3 são primos. Para números até 1000, os fatores terminados em 3 podem ser 13, 23, 43, 53, 73 e 83, e os fatores terminados em 1 são 11, 31, 41, 61 e 71. Dentre estes, descontando os produtos maiores que 1000, obtém-se 12 números terminados em 3 que não são primos nem múltiplos de 3.

Nível 2

1. *Como prêmio por algumas tarefas realizadas, Dona Zuleide deu aos filhos, André, Beto, e Carlos...*

(a) Ver resolução do **problema 2** do **nível 1**.

(b) Para seguir as instruções de D. Zuleide, é preciso dividir a quantidade de bolas por 2 por três vezes, ou seja o número precisa ser divisível por 8. Dividindo 2011 por 8 sobram 3, então Daniel precisaria acrescentar uma quantidade, q, igual a 5 bolinhas mais um múltiplo de 8. Restariam para Daniel, ao final, 1/8 das (2011+q) bolinhas. Descontando as q acrescentadas tem-se $\frac{2011+q}{8} - q = 226$, de onde conclui-se que Daniel teria que acrescentar q=29 bolinhas.

2. *João recebeu a tarefa de armazenar* 6850 *CDs em caixas com a condição de que todas as caixas...*

Ver resolução do **problema 3** do **nível 1**.

3. *Uma folha retangular de papel é dobrada ao longo da linha tracejada...*

a) Ver resolução do **problema 5** do **nível 1**.

b) Considerando $\overline{EM} = \overline{MA} = x$, temos $\overline{DM} = \overline{DC} = 2x$ e pelo teorema de Pitágoras para DEM, obtem-se $x = 5\sqrt{3}$. A área da folha de papel é $2x \cdot 15 = 150\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.

4. *Uma avenida de mão dupla possui dois semáforos, A e B, distantes* 400 *metros um do outro...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

5. *Dos números terminados em 3 entre 0 e 100, quantos não são múltiplos de 3 e nem primos? E...*

Ver resolução do **problema 6** do **nível 1**.

6.

a) *Dados dois números reais positivos x e y, mostre que...*

Basta notar que $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy}$.

b) *Se a, b, c, d são números reais positivos cujo produto é igual a 1...*

Utilizando o resultado do item anterior

$$a + b + c + d \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \geq 2 \cdot 2\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = 4\sqrt{abcd} \qquad \text{e}$$

$$(1 + a) \geq 2\sqrt{1 \cdot a} \;\Rightarrow\; (1 + a)(1 + b)(1 + c)(1 + d) \geq 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{b} \cdot 2\sqrt{c} \cdot 2\sqrt{d} = 16\sqrt{abcd}\,.$$

Nível 3

1. *João recebeu a tarefa de armazenar* 6850 *CDs em caixas com a condição de que todas as caixas...*

Ver resolução do **problema 3** do **nível 1**.

2. *Considere o conjunto* $A = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$*...*

a) Note que A possui 25 números pares e 25 ímpares. Para que a soma seja par, os numeros tem que ser dois ímpares e um par ou três pares. Logo, o número de maneiras é

$$\binom{25}{2} \cdot 25 \; + \; \binom{25}{3} \; = \; \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot 25 \; + \; \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{6} \; = \; 9800.$$

b) Qualquer número em A pode ser escrito da forma $3k$ ou $3k+1$ ou $3k+2$. Assim, definimos os subconjuntos de A: $A_1 = \{3, 6, \ldots, 48\}, A_2 = \{1, 4, \ldots, 49\}$ e $A_3 = \{2, 5, \ldots, 50\}$. O conjunto A_1 têm 16 elementos, enquanto A_2 e A_3 têm 17 elementos cada. Note que se somarmos três elementos de A_1 ou de A_2 ou de A_3 temos um múltiplo de 3. Ainda se somarmos um elemento de A_1, um elemento de A_2 e um elemento de A_3 também teremos um múltiplo de três. Além dessas, não temos mais nenhuma possibilidade de obter uma soma múltiplo de 3. Dessa forma, o número de maneiras será:

$$16 \times 17 \times 17 + \binom{16}{3} + 2 \times \binom{17}{3} = 6544.$$

3. *Seja ABCD um quadrilátero com 18 cm*^{2} *de área...*

Denote por $C(P, R)$ o círculo de centro P e raio R inscrito no quadrilátero $ABCD$ e considere o segmento EF perpendicular aos lados AB e CD que passa por P com $E \in AB$ e $F \in CD$. Neste caso, $\overline{AB} = 2R$. Assim, denotando por x o comprimento do segmento CD e levando em conta que a área do quadrilátero $ABCD$ é igual a 18, tem-se:

$$xR = 6. \tag{1}$$

Agora, considere o segmento CG ($G \in AB$) paralelo à EF e observe que $\overline{BC} = 3x - 2R$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo BGC (retângulo em G), obtém-se:

$$(3x - 2R)^2 = x^2 + (2R)^2.$$

Assim, combinando a última igualdade com (1), concluí-se que $R = 2$.

4. *Uma avenida de mão dupla possui dois semáforos, A e B, distantes* 400 *metros um do outro...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

5. *Entre* 0 *e* 1000*, quantos dos números terminados em* 3 *não são múltiplos de* 3 *e nem primos?*

Ver resolução do **problema 6** do **nível 1**.

6. *Um vidraceiro vende espelhos por 200 reais o metro quadrado...*

Considere primeiro o problema de cortar apenas um espelho retangular do triângulo retângulo e isósceles. Note que se o retângulo não tiver algum de seus lados apoiado em um dos lados do triângulo, é sempre possível trocá-lo por outro que esteja apoiado nos dois catetos e cuja área seja ainda maior. Desta forma, basta considerar o problema com o retângulo apoiado nos catetos do triângulo. Neste caso, se l for o lado do triângulo e x for um dos lados do retângulo, o outro lado será $l - x$ e a área do retângulo $A = x(l - x)$, que é uma função quadrática com coeficiente negativo para x^2 e, portanto, é máxima quando atinge o vértice da parábola, ou seja, quando $x = l/2$, o que torna o retângulo em um quadrado. Agora, no problema de se recortar dois retângulos do triângulo, sejam x e $1 - x$ os lados do retângulo que se apóia sobre os dois catetos (ver figura abaixo). Fora desse primeiro retângulo sobram dois triângulos semelhantes ao inicial e, para que a área seja máxima, do maior deles pode ser recortado um quadrado com lado igual à metade do cateto desse triângulo restante. Sem perda de generalidade, podemos supor $0 < x < 1/2$, de forma que o maior triângulo fora do primeiro retângulo tem catetos medindo $1 - x$ e o maior retângulo que pode ser recortado dele é um quadrado de lado $\frac{1-x}{2}$. A soma das áreas dos dois retângulos é, então,

$$A(x) \; = \; x(1 - x) \; + \; \frac{(1 - x)^2}{4} \; = \frac{1}{4}(1 - x)(3x + 1),$$

representada por uma parábola com concavidade para baixo e com raízes em $\frac{-1}{3}$ e 1. Portanto, a área máxima ocorre no ponto médio das raízes, ou seja, $x = \frac{1}{3}$ e as dimensões dos espelhos serão $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$ e $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$.