Nível 1

1. *Na brincadeira conhecida como "telefone sem fio"...*

(a) Para fazer o caminho inverso, partindo do número que chega à nona pessoa (que é o número falado pela oitava) é preciso analizar, em cada etapa, quais as possibilidades para o número anterior. Um número par e com algarismo das unidades maior que quatro, tanto pode ter surgido como dobro do anterior quanto pela inversão dos dígitos. Por exemplo, 48 pode vir de 24 ou de 84. Assim, é possível escrever uma sequência, em ordem reversa, com todas as possibilidades (usando bifurcações quando houver mais do que um caminho). Levando-se em conta que o número que chegou ao ouvido da nona pessoa foi o oitavo número falado, então o que foi falado pela primeira pessoa deve ser o oitavo na sequência reversa:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & & 3 & & & & & & \\ & & & & & & & \swarrow & & & & & & & \\ 48 & \leftarrow & 24 & \leftarrow & 12 & \leftarrow & 6 & \leftarrow & 60 & \leftarrow & 30 & \leftarrow & 15 & \leftarrow & 51 \\ & \nwarrow & & & & & & & & & & & & & \\ & & 84 & \leftarrow & 42 & \leftarrow & 21 & & & & & & & & \end{array}$$

Portanto, no caso do 48, o primeiro número só pode ter sido 51.

(b) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, se o oitavo número foi o 68, o sétimo número pode ser 86 ou 34. 34 só pode vir de 17, que por sua vez só pode vir de 71, que não pode ter resultado de outro número, segundo as regras. Mas aqui é interessante observar que a sequência pode ficar alternando entre 68 e 86, então as possíveis sequências com 8 ou mais números são da forma

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & & 34 & \leftarrow & 17 & \leftarrow & 71 & & \\ & & & & & & & \swarrow & & & & & & & \\ 68 & \leftarrow & 86 & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & 68 & \leftarrow & 86 & \leftarrow & 68 & \leftarrow & 86 & \leftarrow & \cdots \\ & & & & & & & & & \nwarrow & & & & & \\ & & & & & & & & & & 43 & & & & \end{array}$$

Esse diagrama deveria ter bifurcações semelhantes em cada 68 e em cada 86, mas apenas duas delas foram exibidas para simplificar a representação. Na sequência que alterna entre 68 e 86, 68 ocupa as posições ímpares e 86 as pares. Assim, os possíveis valores para o número falado pela primeira pessoa (oitavo da sequência reversa), são 34, 71 e 86.

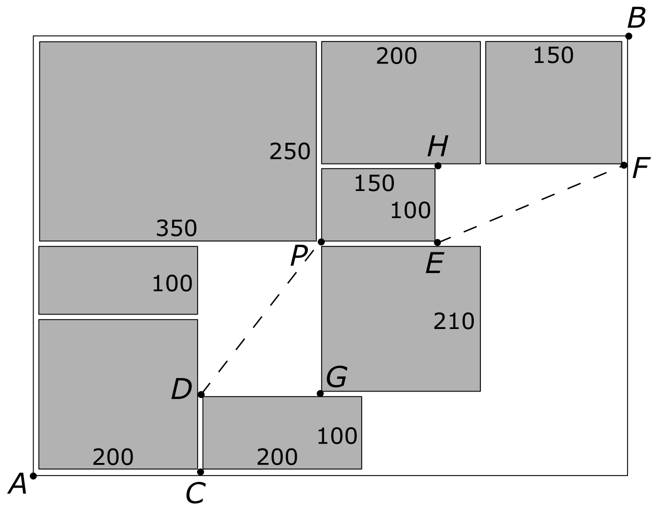
2. *Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água...*

(a) Cada litro de suco concentrado é misturado a quatro litros de água, totalizando cinco litros, ou 5000 ml. Dividindo por 400 ml (quantidade por pessoa), obtém-se 12,5 pessoas, ou seja o suco é suficiente para 12 pessoas beberem 400 ml cada e sobram 200 ml.

(b) De acordo com o texto da questão, acrescentando-se mais uma parte de água, tem-se suco suficiente para as cinco pessoas que não estavam previstas. De com a previsão de 400 ml por pessoa, cinco pessoas correspondem a $5 \times 400 = 2000$ ml. Portanto, uma parte de água corresponde, neste caso, a dois litros. Como o suco originalmente preparado continha uma parte de suco e quatro de água, ele consistia de dez litros, sendo suficiente para $10000 \div 400 = 25$ pessoas. Logo, o número de convidados originalmente previsto era 25.

3. *Um centro de pesquisas é constituído de vários prédios dispostos em uma área retangular...*

Levando-se em conta que em um triângulo qualquer lado é sempre mais curto que a soma dos outros dois, podemos reduzir os possíveis candidatos a caminho mais curto às linhas poligonais *PCDA* ou *PEFB*, indicadas na figura a seguir.



Como $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{PE} + \overline{FB} = 300$, resta comparar $\overline{PD}$ e $\overline{EF}$. Os triângulos PGD e EHF ambos possuem um ângulo reto (formado pelos lados que são paralelos aos do retângulo maior) e, das medidas apresentadas na figura, é fácil deduzir que $\overline{PG} = 210$, $\overline{DG} = 150$, $\overline{HF} = 200$ e $\overline{EH} = 100$. Então, podemos sobrepor dois triângulos com estas medidas, fazendo coincidir o ângulo reto, para verificar que PD é mais longo que EF e, portanto, a saída mais próxima de P é a B.

4. *O painel do computador de bordo de um certo carro está configurado para exibir dois números...*

Os dois números coincidem quando a quantidade de combustível consumida atinge um litro, uma vez que aí a distância percorrida dividida por um resulta no mesmo número para o desempenho médio. Portanto, isto só pode ocorrer uma vez em uma mesma viagem (sem zerar o contador novamente).

5. *Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo, no sentido horário...*

Ver resolução do item **(a)** do **problema 6** do **nível 2**.

6. *Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram...*

Em cada cidade ocorrem nove partidas (o time da casa enfrenta cada um dos outros). Assim, na primeira fase foram disputadas 90 partidas no total. Se nenhuma terminasse empatada, em cada partida um dos times somaria três pontos e o outro zero, totalizando 270 pontos na primeira fase. Cada partida empatada resulta em um ponto para cada time, ou seja, dois pontos na partida. Assim, cada partida empatada resulta em um ponto a menos que se ela tivesse terminado sem empate. Como o total de pontos somados ao final da primeira fase foi $242 = 270 - 28$, conclui-se que 28 partidas terminaram empatadas.

Nível 2

1. *Na brincadeira conhecida como "telefone sem fio"...*

(a) Ver resolução do **problema 1** do **nível 1**.

(b) Seguindo raciocínio semelhante ao do item **(b)** do **problema 1** do **nível 1**, se o oitavo número foi 58, o sétimo número pode ser 85 ou 29. Além disso, uma vez que surgem 58 ou 85 a sequência passa a alternar entre estes dois números. Então, as possíveis sequências terminando em 58 podem ser obtidas do seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
58 & \leftarrow & 85 & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & 58 & \leftarrow & 85 & \leftarrow & 58 & \leftarrow & 85 & \leftarrow & \cdots & & & & & & 61 & & & & \\
 & & & & & & & \nwarrow & & & & & & & & & & & & \swarrow & & & & & \\
 & & & & & & & & 29 & \leftarrow & 92 & \leftarrow & 46 & \leftarrow & 64 & \leftarrow & 32 & \leftarrow & 16 & \leftarrow & 8 & \leftarrow & 80 & \leftarrow & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & & \nwarrow & & & & & & & & \nwarrow & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 23 & & & & & & & & 4 & \leftarrow & \cdots
\end{array}$$

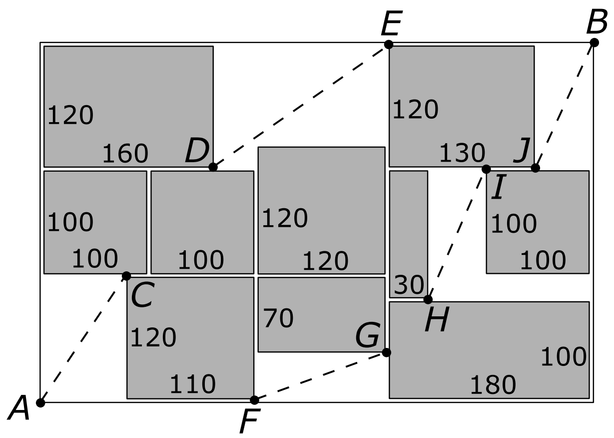
Esse diagrama deveria ter bifurcações semelhantes em cada 58, mas apenas uma delas foi exibida para simplificar a representação. Na sequência (reversa) que alterna entre 58 e 85, 58 ocupa as posições ímpares e 85 as pares (na ordem em que os números foram falados, o oitavo deve ser 58). Assim, os possíveis valores para o número falado pela primeira pessoa (oitavo da sequência reversa) são 8, 29, 32, 46, 61 e 85.

2. *Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água...*

Ver resolução do **problema 2** do **nível 1**.

3. *Um centro de pesquisas é constituído de vários prédios dispostos em uma área retangular...*

A figura a seguir destaca alguns pontos de referência importantes no mapa.



Levando-se em conta que em um triângulo qualquer lado é sempre mais curto que a soma dos outros dois, podemos reduzir os possíveis candidatos a caminho mais curto às linhas poligonais passando por AC e DEB, por AC e $HIJB$ ou por AFG e $HIJB$, sempre conectando as duas partes pelas ruas entre os prédios. Para poder comparar os comprimentos, é necessário calcular as diagonais tracejadas na figura e, das medidas apresentadas, é possível deduzir que AC é hipotenusa de um triângulo retângulo, com catetos medindo 90 e 120. Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AC}^2 = 120^2 + 90^2 = 100(144+81) = 100 \cdot 225 = 10^2 \cdot 15^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = 150.$$

De maneira análoga,

$$\overline{DE}^2 = 120^2 + 160^2 = 100(144+256) = 100 \cdot 400 = 10^2 \cdot 20^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{DE} = 200.$$

Quanto a FG, HI e JB, os três são hipotenusas de triângulos retângulos cujos catetos medem 50 e 120. Logo,

$$120^2 + 50^2 = 100(144+25) = 100 \cdot 169 = 10^2 \cdot 13^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{FG} = \overline{HI} = \overline{JB} = 130.$$

Então, calculando o comprimento dos caminhos, tem-se, então por AC e DEB, como as ruas de C a D somam $10 + 100 + 60 = 170$ e $\overline{EB} = 180$ o caminho de A a B, passando por DE totaliza $150 + 170 + 200 + 180 = 700\,\text{m}$.

Por AC e $HIJB$, as ruas de C a H somam $10+100+120+20+30=280$ e $\overline{IJ}=50$. Logo, este caminho totaliza $150+280+130+50+130=740\,\text{m}$.

Finalmente, por AFG e $HIJB$, tem-se $\overline{AF}=200$, as ruas de G a H somam $50+30=80$ e $\overline{IJ}=50$. Então, este caminho totaliza $200+130+80+130+50+130=720\,\text{m}$.

Portanto, o caminho mais curto é o que passa por AC e DEB, com 700 metros.

4. *O painel do computador de bordo de um certo carro está configurado para exibir dois números...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

5. *Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram...*

Ver resolução do **problema 6** do **nível 1**.

6. *Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo...*

(a) Construindo uma tabela com os números de amendoins retirados por cada pessoa em cada rodada, tem-se

Pessoa:	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22								

Uma simples inspeção da tabela permite observar que a diferença entre quem retirou mais e quem retirou menos amendoins é maior quando a última pessoa a retirar retira exatamente um amendoim a mais que a retirada anterior, ou seja, a quantidade de amendoins restantes no pacote após a penúltima retirada é exatamente o número de amendoins desta penúltima retirada mais um. Por exemplo, se na segunda rodada a 3ª pessoa retira exatamente os 13 últimos amendoins, ela torna-se a pessoa que retirou mais amendoins, 16 no total, enquanto que a que retirou menos amendoins fica sendo a 4ª, com 4. Uma diferença de 12. Por outro lado, se houver de 1 a 12 amendoins nesta última retirada, a pessoa que retirou menos continua tendo 4 e a retirou mais (que pode ser a 2ª ou a 3ª) terá retirado menos que 16, resultando em uma diferença menor. Além disso, a cada retirada a diferença entre quem retirou mais e quem retirou menos aumenta em uma unidade, exceto quando a retirada é feita pela 10ª pessoa, caso em que a diferença se mantém. Considerando estas características da distribuição, verifica-se que a diferença de 20 entre o que retirou menos e o que retirou mais ocorre quando a 2ª pessoa retira os últimos 22 amendoins, totalizando $22+12+2=36$, enquanto que a 3ª pessoa teria $13+3=16$. E, para que isso ocorra, a quantidade inicial de amendoins no pacote deve ser $1+2+3+\cdots+21+22 \;=\; 253$.

(b) Para se obter a quantidade inicial máxima de amendoins que resulta, ao final, em uma diferença de 20 entre o que retirou mais e o que retirou menos, é importante observar que, no total das duas primeiras rodadas, cada pessoa já tem dois amendoins a mais que a pessoa que a antecede. Então, na terceira rodada, se a pessoa que tirou mais amendoins for a última a retirar, ela precisa ter retirado 22 nesta última retirada para ter 20 amendoins a mais que a pessoa que retirou menos, se, por outro lado, a última pessoa tiver retirado de 2 a 21 e a penúltima 24, a diferença de 20 também estará garantida. E, ainda, se a última retirada tiver sido de 1, a pessoa que fez esta retirada é quem retirou menos e como já tinha 2 a mais que a anterior, da segunda rodada, a penúltima retirada precisaria ser de 23. Portanto para se utilizar o máximo de amendoins na distribuição, a penúltima pessoa a retirar seria a 4ª, retirando 24 e a 5ª finaliza, retirando 22. Neste caso, a quantidade inicial de amendoins seria $1+2+3+\cdots+23+24+22 \;=\; 253+69 \;=\; 322$.

Nível 3

1. *Na brincadeira conhecida como "telefone sem fio"...*

(a) Ver resolução do item **(b)** do **problema 1** do **nível 2**.

(b) Na sequência de 8 números falados pelos participantes, pelo menos um deles deve ser resultado da inversão dos dígitos do anterior (experimente começar com 1 e seguir as regras). O menor número que pode resultar da inversão dos dígitos é 5 (inversão do 50), mas investigando-se as possíveis sequências que terminam em 5, tem-se

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 5 & \leftarrow & 50 & \leftarrow & 25 & \leftarrow & 52 & \leftarrow & 26 & \leftarrow & 62 & \leftarrow & 31 \\ &&&&&&&&& \nwarrow &&& \\ &&&&&&&&&& 13 && \end{array}$$

De onde se conclui que uma sequência de 8 números obedecendo às regras não pode terminar em 5. Utilizando o mesmo argumento para 6, tem-se

$$\begin{array}{ccccccccc} 6 & \leftarrow & 60 & \leftarrow & 30 & \leftarrow & 15 & \leftarrow & 51 \\ & \nwarrow &&&&&&& \\ && 3 &&&&&& \end{array}$$

e, para 7:

$$7 \;\leftarrow\; 70 \;\leftarrow\; 35 \;\leftarrow\; 53$$

Todas sequências muito curtas. Mas terminando em 8 é possível uma sequência mais longa:

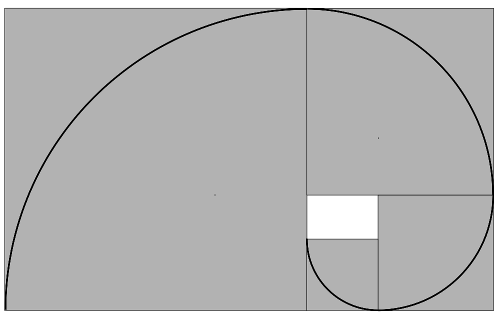
$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} 8 & \leftarrow & 80 & \leftarrow & 40 & \leftarrow & 20 & \leftarrow & 10 & \leftarrow & 5 & \leftarrow & 50 & \leftarrow & 25 & \leftarrow & 52 & \leftarrow & \cdots \\ & \nwarrow &&&&&&&&&&&&&&&&& \\ && 4 & \leftarrow & 2 & \leftarrow & 1 &&&&&&&&&&&& \end{array}$$

Portanto, o menor número que pode chegar ao ouvido da nona pessoa é 8 (basta que a primeira pessoa fale "25").

2. *Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram...*

Ver resolução do **problema 6** do **nível 1**.

3. *Diz-se que dois números estão na razão áurea, se a razão entre o menor e o maior, for igual à razão entre o maior e a soma dos dois...*



(a) Denotando por ϕ o lado do segundo maior quadrado, tem-se, da definição de retângulo áureo, que

$$\frac{\phi}{1} = \frac{1}{1+\phi} \quad \Rightarrow \quad \phi^2 + \phi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62\,,$$

uma vez que a outra raiz da equação é negativa. As expressões acima permitem, ainda, deduzir que $\phi^2 = 1-\phi$ e $1+\phi = 1/\phi$. Assim, o lado do terceiro maior quadrado é $1-\phi = \phi^2$, e o do quarto quadrado $\phi - \phi^2 = \phi(1-\phi) = \phi^3$, que também equivale a $2\phi - 1$. Como o comprimento do arco de um quarto de círculo com raio r é $\pi r/2$, o comprimento da espiral será

$$\frac{\pi}{2}(1+\phi+\phi^2+\phi^3) \;=\; \frac{\pi}{2}(1+\phi+1-\phi+2\phi-1) \;=\; \frac{\pi}{2}(1+2\phi) \;=\; \frac{\pi\sqrt{5}}{2} \approx 3{,}14 \cdot 1{,}12 \;=\; 3{,}5168\,\text{m}.$$

(b) Se a construção continuasse, chegando a 2013 quadrados, o comprimento da espiral seria

$$\frac{\pi}{2}(1+\phi+\phi^2+\cdots+\phi^{2012}) \;=\; \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\phi^{2013}}{1-\phi} \;=\; \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\phi^2}-\phi^{2011}\right).$$

Agora, $1+\phi = 1/\phi \;\Rightarrow\; (1/\phi)^2 = 1+2\phi+\phi^2 = 2+\phi$. Quanto a ϕ^{2011}, trata-se de uma parcela desprezível, uma vez que $\phi < 1$ e suas potências decrescem à medida em que se aumenta o expoente. Mais precisamente,

$$\phi^2 = 1-\phi < \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \phi^8 < \frac{1}{16} < \frac{1}{10} \quad\Rightarrow\quad \phi^{2011} < \phi^{2000} = (\phi^8)^{250} < 10^{-250}.$$

Logo, o comprimento da espiral com 2013 quadrados seria, aproximadamente

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\phi^2} \;=\; \frac{\pi}{2}(2+\phi) \;=\; \frac{\pi(3+\sqrt{5})}{4} \;\approx\; 3{,}14\cdot 1{,}31 \;=\; 4{,}11\,\text{m}.$$

4. *Determine todos os possíveis trios de números naturais a, b e c, tais que* $(a^4-b^4)\cdot c = 2013$.

Com o objetivo de fatorar 2013, nota-se que é divisível por 3, com $2013 = 3\cdot 671$. Busca-se, então na sequência dos números primos o primeiro divisor de 671, encontrando $671 = 11\cdot 61$. E 61, não sendo divisível por nenhum número primo menor que 8, é número primo. Portanto, a fatoração de 2013 em primos é $3\cdot 11\cdot 61$. Por outro lado,

$$a^4 - b^4 \;=\; (a^2+b^2)(a^2-b^2) \;=\; (a^2+b^2)(a+b)(a-b)\,.$$

Sendo $a > b$, naturais, todos estes fatores serão também naturais, com $(a^2+b^2) > (a+b) > (a-b)$, de forma que a equação original é equivalente a

$$(a^2+b^2)(a+b)(a-b)c \;=\; 61\cdot 11\cdot 3\,.$$

Verificando cada possibilidade de identificar fatores dos dois lados, cada fator do lado esquerdo tem que ser um divisor de 2013. Assim, se $a-b=1$, então $a+b$ poderia ser 3, 11 ou 33. Mas $a+b=3 \;\Rightarrow\; a=2$ e $b=1 \;\Rightarrow\; a^2+b^2=5$, que não divide 2013. De modo análogo $a+b=11 \;\Rightarrow\; a=6$ e $b=5 \;\Rightarrow\; a^2+b^2=61$ e, neste caso, com $c=3$ a equação é satisfeita. Continuando a verificação, tem-se $a+b=33 \;\Rightarrow\; a=17$ e $b=16 \;\Rightarrow\; a^2+b^2>400$, enquanto que, de 2013, restaria apenas o fator 61. Considerando, agora, $a-b=3$, seria preciso que $a+b=11 \;\Rightarrow\; a=7$ e $b=4 \;\Rightarrow\; a^2+b^2=65$, que não divide 2013.

Portanto, a única solução para o problema é obtida com $a=6,\; b=5$ e $c=3$.

Obs.: Na educação básica, por conveniencia, normalmente se inclui o zero no conjunto dos números naturais (ou pode-se dizer também que, em matemática superior, por outras conveniências, o zero é excluído de $\mathbb{N}$). Neste caso deve-se consdiderar também a solução com $a=1,\; b=0$ e $c=2013$.

5. *Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo...*

(a) Ver resolução do **problema 6** do **nível 2**.

(b) Conforme argumentado na resolução do **problema 6** do **nível 2**, a diferença de 2013 entre o que retirou mais amendoins e o que retirou menos é atingida o mais cedo possível se a última pessoa a retirar conseguir retirar o máximo possível para aquela retirada, ou seja, um amendoim a mais que os da retirada anterior. Esta será, então, a pessoa a retirar mais e sua sucessora na roda será a que retirou menos. Considerando que, ao final de n rodadas completas, cada pessoa, da 2ª à 10ª, tem exatamente n amendoins a mais que a pessoa que a antecede na roda, se a diferença de 2013 ocorrer na rodada $n+1$ a última pessoa terá que retirar $2013+n$ para ter 2013 a mais que a pessoa à sua esquerda. Além disso, para que 2013+n caia na rodada $n+1$ é necessário que

$$10n+1 \;\leq\; 2013+n \;\leq\; 10n+10$$

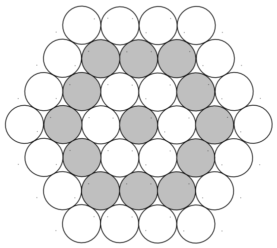
A primeira desigualdade implica $9n \leq 2012$ e a segunda, $9n \geq 2003$. Então, a única possibilidade com n inteiro é $9n = 2007 \;\Rightarrow\; n = 223 \;\Rightarrow\; 2013+n = 2236$ amendoins retirados pela 6ª pessoa ao final. Portanto, o número mínimo de amendoins necessários ao início é $1+2+3+\cdots+2236 \;=\; 1118\cdot 2237 \;=\; 2500966$.

6. *Um estudante está construindo um jato de água com fluxo laminar e, para eliminar as turbulências do fluxo, a água deve passar por um curto tubo cilíndrico de PVC preenchido com canudinhos de refresco...*

(a) Um limitante superior para o número, N, de canudinhos, pode ser facilmente obtido, considerando-se que, na seção transversal, a área ocupada pelos círculos menores (canudinhos) é necessariamente menor que a área do círculo maior (tubo de PVC), de forma que

$$N < \frac{\text{área do círculo maior}}{\text{área de cada círculo menor}} = \frac{\pi \cdot 40^2}{\pi \cdot 2^2} = 400\,.$$

Logo, dois pacotes de 200 canudinhos são suficientes e resta determinar se um pacote não seria suficiente. Uma observação do arranjo dos canudinhos centrais na figura que aparece no enunciado, sugere que em volta de um círculo é possivel distribuir, de maneira exata seis outros círculos idênticos. De fato, os centros dos círculos serão vértices de triângulos equiláteros e os centros dos seis círculos tangentes ao central são vértices de um hexágono regular. A construção pode continuar em camadas, como indica a figura a seguir.

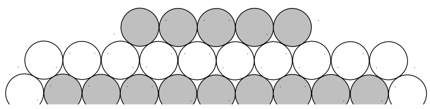


A cada camada, acrescenta-se um círculo a cada lado do novo hexágono, em relação aos do hexágono da camada anterior, de forma que o primeiro tem 6 círculos, o segundo 12, o terceiro 18 e, assim, sucessivamente, com a n-ésima camada tendo $6n$ círculos. Cada diagonal dos hexágonos é formada por uma fileira de $2n+1$ círculos e, então, esta configuração com n camadas hexagonais pode ser inscrita em um círculo cujo diâmetro é $2n+1$ vezes o diâmetro do canudinho. Neste caso, o número de canudinhos empregados é

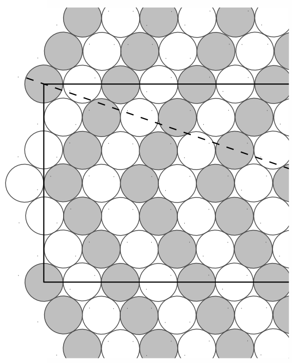
$$1+6+12+18+\cdots+6n = 1+6(1+2+3+\cdots+n) = 1+3n(n+1).$$

Para uma configuração desse tipo, em camadas hexagonais, caber dentro do tubo com 80 mm de diâmetro, é suficiente que $(2n+1)\cdot 4\,\text{mm} < 80\,\text{mm}$, ou seja, $8n < 76 \Rightarrow n \leq 9$. Para $n = 9$, a quantidade de canudinhos necessários é $1+3\cdot 9\cdot(9+1) = 271 > 200$. Portanto, são necessários entre 200 e 400 canudinhos para preencher o tubo, ou seja, são necessários dois pacotes de 200.

(b) Se os pacotes forem de 100 canudinhos, é necessário determinar se cabem, no tubo de PVC, mais do que 300 canudinhos. A configuração com 9 camadas hexagonais tem um diâmetro de $(2\cdot 9+1)\cdot 4 = 76\,\text{mm}$, o que permite ainda alguma folga no círculo de 80 mm. E com 271 canudinhos, basta acrescentar mais 30 para ultrapassar os 300. Uma maneira de se fazer isso é acrescentar uma fileira de 5 círculos ao longo de cada um dos 6 lados da configuração hexagonal. Com nove camadas hexagonais, o lado do hexágono mais externo é formado por 10 círculos, então com o acréscimo, cada um dos lados ficaria com o seguinte aspecto:



Para verificar se estes círculos acrescentados ficam dentro do círculo maior, basta observar a diagonal do retângulo que liga os centros de círculos diametralmente opostos, como indica a figura a seguir, onde foi detalhada a região próxima a um dos vértices do hexágono.



Não é difícil verificar que este retângulo tem o comprimento de 17 vezes o diâmetro do canudinho, ou seja 68 mm e sua altura é a mesma que a de um triângulo equilátero com o lado de 6 vezes o diâmetro de um canudinho, ou seja, $6 \cdot 4\sqrt{3}/2 = 12\sqrt{3}$. Assim, pelo teorema de Pitágoras, a diagonal do retângulo mede $\sqrt{68^2 + 12^2 \cdot 3} = \sqrt{5056} = \sqrt{79 \cdot 64} = 8\sqrt{79} < 8\sqrt{81} = 72\,\text{mm}$. Mas a diagonal do retângulo fornece apenas a distância entre os centros dos círculos nos extremos. Acrescentando-se o raio de um círculo (2 mm) em cada extremidade, é possível concluir que os novos círculos acrescentados ficam no interior de um círculo com 76 mm de diâmetro e centrado no centro do hexágono original. Portanto, cabem mais que 300 canudinhos e menos que 400 no tubo de PVC, sendo necessários quatro pacotes de 100 canudinhos.