Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
XXIII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Nível 2

1. *Se um número inteiro termina com zeros, estes zeros são chamados zeros terminais...*

(a) Cada zero terminal de P corresponde a um fator de $10 = 2 \cdot 5$ e, consequentemente, um fator de 5. No caso de $P = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 20$, os únicos fatores 5 vêm de 5, 10, 15 e 20, o que resulta em 4 zeros terminais.

(b) Ver resolução do item (b) do **problema 1** do **nível 1**.

2. *Considerando o algoritmo da divisão no conjunto dos números inteiros positivos...*

(a) O maior resto possível na divisão por y é $y - 1$. Assim,

$$\begin{cases} x = 18y + y - 1 \\ x + y = 319 \end{cases}$$

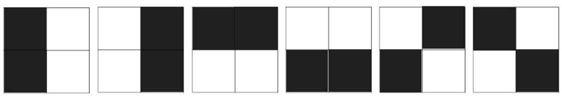
o que resulta em $x = 303$ e $y = 16$.

(b) Ver resolução do item (b) do **problema 2** do **nível 1**.

3. *Dividindo-se um quadrado maior em vários quadradinhos menores, considere a tarefa de pintar de preto alguns dos quadradinhos...*

(a) Ver resolução do item (a) do **problema 3** do **nível 1**.

(b) O tabuleiro (I) pode ser pintado exatamente de 6 maneiras:



Para o tabuleiro 4×4, vamos dividir a contagem em dois casos:

1. Se tivermos pelo menos duas casas seguidas na 1ª coluna pintadas da mesma cor, ou seja em $2^4 - 2$ casos, então devemos pintar a 2ª coluna com as cores opostas à da 1ª, senão iríamos produzir quadrados 2×2 com mais que duas casas da mesma cor. Desta forma, o mesmo procedimento deve ser feito para pintar a 3ª e 4ª colunas. Logo, quando pintamos a 1ª coluna, neste caso, estamos determinando todas as outras colunas, donde temos $2^4 - 2 = 14$ maneiras possíveis.

2. Caso a 1ª coluna seja pintada com cores alternadas, onde temos 2 possibilidades, a 2ª coluna também deve ser pintada com cores alternadas, não necessariamente opostas à da 1ª coluna. O mesmo também vale para a 3ª e 4ª colunas. Assim, para cada coluna temos 2 possibilidades, o que nos dá $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ configurações possíveis.

Portanto, no total, temos $14 + 16 = 30$ maneiras distintas de pintar o tabuleiro 4×4 de modo que quaisquer quadrados 2×2 tenha exatamente duas casas brancas e duas casas pretas.

4. *Um grupo de homens e mulheres está sentado em volta de uma mesa redonda...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

5. *Em qualquer quadrado, o maior círculo que se pode desenhar em seu interior ocupa, aproximadamente, 11/14 da área do quadrado ...*

Ver resolução do **problema 6** do **nível 1**.

6. *Determine todos os possíveis trios de números naturais cuja soma seja 23 e o produto seja 360.*

Ver resolução do item (b) do **problema 5** do **nível 1**.