Nível 1

1. *Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso...*

(a) Como sempre sobram duas bolinhas nas divisões mencionadas no enunciado, se duas bolinhas forem retiradas do total, o número de bolinhas restantes deve ser divisível por 3, 4, 5 e 6, cujo menor múltiplo comum é 60. Assim o total de bolinhas tem que ser um múltiplo de 60 mais as duas bolinhas retiradas. Se o número não chega a 100, só pode ser 62.

(b) Dividindo 2012 por 60, obtemos $2012 = 33 \cdot 60 + 32 = 1980 + 32$, como 1980 é múltiplo de 60, 1982 tem a propriedade descrita no enunciado. O próximo número com esta propriedade é 1982+60=2042 e tanto um quanto o outro ficam a 30 unidades de 2012.

2. *Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1...*

(a) Para decompor no menor número de parcelas, devemos utilizar as maiores parcelas possíveis. Como 1111 cabe uma vez em 2012, obtemos 2012 - 1111= 901. Retirando agora oito parcelas de 111, temos 901-888= 13 = 11+1+1. Assim, $2012 = 1111 + 8 \cdot 111 + 11 + 1 + 1$, com 12 parcelas

(b) Note que na partição em uns, se houver 11 parcelas de um mesmo tipo, elas podem ser substituídas por parcelas maiores. Além, disso, com dez parcelas de um mesmo tipo, não pode haver parcelas ainda menores, pois basta somar 1 às dez parcelas, para se obter uma parcela com uns maior que as anteriores. Desta forma, o maior número de parcelas pode ser obtido tomando-se $10 \cdot 1 + 9 \cdot 11 + 9 \cdot 111 = 1108$, com 28 parcelas.

3. *Um experimento com peixes envolve cinco tanques...*

Para os tanques 2 a 4, enquanto houver peixes no tanque $n-1$, o número de peixes no tanque n perde uma unidade por dia, uma vez que são colocados $n-1$ peixes e retirados n. Uma vez que o tanque $n-1$ estiver vazio, o tanque n passa a perder n peixes por dia. Por exemplo, nos 100 primeiros dias, esvazia-se o tanque 1 e os tanques 2 a 4 perdem 100 peixes cada. Depois disso, o tanque 2 não recebe mais peixes e, sendo retirados dois por dia, o tanque estará sem peixes ao final dos próximos 50 dias. Pode-se então construir a seguinte tabela com os números de peixes ao final de alguns períodos chave:

Tanque	1	2	3	4	5
100 dias	0	100	200	300	900
150 dias	0	0	150	250	1100
200 dias	0	0	0	200	1300
250 dias	0	0	0	0	1500

(a) A partir dos números obtidos acima, conclui-se que são necessários 250 dias para que todos os peixes estejam no tanque 5.

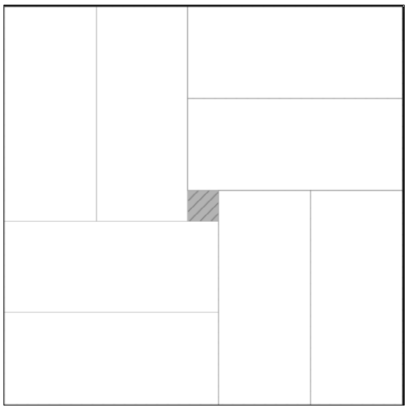
(b) No 150º dia os dois últimos peixes do tanque 2 são retirados, então, ao final do 149º dia, dois peixes estarão no tanque 2.

(c) Ao final de 150 dias, os tanques 1 e 2 não possuem mais peixes, o tanque 3 possui 150 e no tanque 4 restam 250. Nos próximos 22 dias, 66 são retirados do tanque 3, restando 87, e o número de peixes no tanque 4 decresce em 22, passando a 228. Os demais peixes estarão no tanque 5, ou seja 1500-228-87=1185.

4. *De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de 7 cm×3 cm...*

A área de cada cartão é de $7 \cdot 3 = 21\,\text{cm}^2$, então dividindo-se a área da folha quadrada de papel por 21 obtém-se um limitante para o número de cartões retangulares que se pode obter. Esse teto não necessariamente é possível de se atingir (Por exemplo, de um quadrado 8×8 só é possível recortar dois retângulos 7×3, embora sobrem $22\,\text{cm}^2$, que é maior que a área de um cartão).

(a) Considerando-se que $13 = 7 + 3 + 3$, em cada lateral do quadrado cabe um retângulo no sentido do comprimento e mais dois no sentido da largura. Pode-se, então, arranjar 8 retângulos em 4 pares, cobrindo 7 cm×6 cm cada um e sobrando, do quadrado 13×13, apenas um quadrado 1×1, como ilustra a figura a seguir.



(b) Observando que $130 = 10 \cdot 13$, é fácil reproduzir a configuração do item anterior multiplicando todas as medidas por 10, isto é, agrupando 200 retângulos $7{\times}3$ (10 no sentido do comprimento por 20 na largura), de modo a formar grandes retângulos com $70\,\text{cm}{\times}60\,\text{cm}$, que podem ser dispostos de maneira semelhante à do item anterior. Restará o quadrado central, agora com $10{\times}10$, de onde podem ser recortados, de maneira análoga, quatro retângulos $7{\times}3$, restando ao final apenas um quadrado $4{\times}4$. O total de retângulos obtidos, nesse caso, é $4 \cdot 200 + 4 = 804$. Como a área restante, de $16\,\text{cm}^2$, é menor que os $21\,\text{cm}^2$ de cada retângulo, seria impossível obter um número maior de retângulos (Note que $130^2 = 16900 = 804 \cdot 21 + 16$).

5. *Em um certo carro de passeio com tração dianteira os pneus dianteiros gastam-se mais rapidamente...*

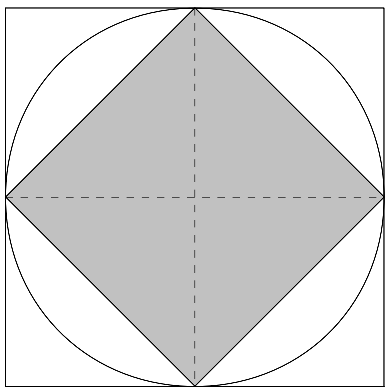
Após rodar x milhares de quilômetros, os pneus dianteiros terão gasto $x/40$ de sua vida útil e os trazeiros $x/50$ (Por exemplo, rodando 20.000 Km, consome-se metade da vida útil dos pneus dianteiros e $2/5$ dos traseiros). Restarão então $1 - \frac{x}{40} = \frac{40-x}{40}$ dos pneus dianteiros e $1 - \frac{x}{50} = \frac{50-x}{50}$ dos traseiros. Realizando o rodízio neste momento, os pneus que eram trazeiros e foram passados para a frente podem rodar $\frac{50-x}{50}$ de 40.000 Km e os que eram dianteiros e foram passados para trás podem rodar $\frac{40-x}{40}$ de 50.000 Km. Para que os pneus se acabem ao mesmo tempo, estas duas quilometragens tem que ser iguais, ou seja,

$$\frac{50-x}{50} \times 40.000 = \frac{40-x}{40} \times 50.000 \quad \Rightarrow \quad (50-x) \times 16 = (40-x) \times 25 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{200}{9} = 22,2222.$$

Portanto, o rodízio deve ser realizado após rodar, aproximadamente, 22.222 Km.

6. *O maior círculo que se pode desenhar dentro de um quadrado...*

Desenhando um quadrado menor dentro do círculo inscrito no quadrado maior, não é difícil verificar que a área do quadrado menor é metade da área do maior. Basta desenhar o quadrado menor de maneira que seus vértices fiquem nos pontos médios do quadrado maior como na figura abaixo.



Denotando por q a área do quadrado menor, Q a área do maior e c a área do círculo temos, então, aproximadamente, $c = 0{,}785\,Q$ e $Q = 2q$, de onde obtemos

$$c = 1{,}57\,q \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{c} = \frac{1}{1{,}57} \approx 0{,}637$$

ou seja, 63,7%.

Nível 2

1. *Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso...*

(a) Como sempre sobra uma bolinha a menos que o dividendo nas divisões mencionadas no enunciado, se uma bolinha for acrescentada ao total, o número de bolinhas resultante deve ser divisível por 2, 3, 4, 5 e 6, cujo menor múltiplo comum é 60. Assim o total de bolinhas tem que ser um múltiplo de 60 menos a bolinha acrescentada. Se o número não chega a 100, só pode ser 59.

(b) Dividindo 2012 por 60, obtemos $2012 = 33 \cdot 60 + 32 = 1980 + 32$, como 1980 é múltiplo de 60, 1979 tem a propriedade descrita no enunciado. O próximo número com esta propriedade é $1979 + 60 = 2039$, sendo este o mais próximo de 2012.

2. *Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1...*

Ver resolução do **problema 2** do **nível 1**.

3. *Um experimento com peixes envolve cinco tanques...*

Ver resolução do **problema 3** do **nível 1**.

4. *De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de 7 cm×3 cm...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

(c) O número máximo de cartões não pode passar de 42, uma vez que $30^2 = 900 = 42 \cdot 21 + 18$. Tentando a mesma estratégia dos itens anteriores, nota-se que a única maneira de decompor 30 em um múltiplo de 7 mais um múltiplo de 3 é fazer $30 = 21 + 9 = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 3$, de forma que podem ser formados quatro blocos com 9 retângulos cada e medindo 21×9. Encaixando-os como no item **(a)** resta um quadrado central com 12 cm de lado, de onde só é possível recortar 5 cartões, no máximo (4 lado a lado, formando um retângulo 7×12 mais um no espaço de 5×12 que resta. Isso daria $4 \cdot 9 + 5 = 41$ cartões e sobraria $39\,\text{cm}^2$. Como esta sobra é razoavelmente grande, podemos tentar outras formas de arranjar os retângulos.

Por exemplo, agrupando 3 cartões no sentido do comprimento por 10 no sentido da largura, pode ser formado um retângulo de 21×30, restando, do quadrado inicial, uma faixa de 9×30, de onde pode ser recortado um retângulo de 9×28 (3 cartões de largura por quatro no comprimento) restarão $9 \times 2 = 18\,\text{cm}^2$. Portanto, do quadrado 30×30 é possível recortar 42 cartões.

5. *Em um certo carro de passeio com tração dianteira os pneus dianteiros gastam-se mais rapidamente...*

Ver resolução do **problema 5** do **nível 1**.

6. *Usualmente o perímetro e a área de um retângulo são calculados conhecendo-se as medidas dos lados...*

(a) Denotando por x e y as dimensões do retângulo, temos $2x + 2y = 30$ e $xy = 56$. Da primeira equação, obtemos $y = 15 - x$, que substituído na segunda equação leva a $x^2 - 15x + 56 = 0$, que tem as raízes $x = 7$ e $x = 8$. Escolhendo qualquer um desses valores para x, o $y = 15 - x$ será o outro. Portanto o retângulo procurado mede 7×8.

(b) Usando um raciocínio análogo ao do item anterior, consideramos $2x + 2y = P$ e $xy = A$, de onde obtemos $y = \frac{P}{2} - x$, que substituído na outra equação leva a $x^2 - \frac{P}{2}x + A = 0$. Esta equação só tem solução se o discriminante não for negativo, ou seja, se

$$\left(\frac{P}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot A \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P^2 - 16A}{4} \ge 0$$

ou seja, para que exista um retângulo com área A e perímetro P, é necessário que $P^2 \ge 16A$. Caso valha a igualdade, a equação quadrática só tem uma raiz e o retângulo procurado acaba sendo um quadrado.

Nível 3

1. *Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1...*

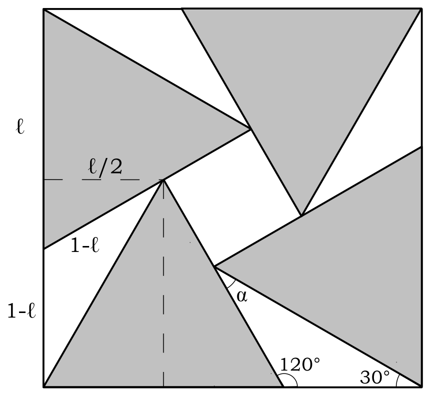
Ver resolução do **problema 2** do **nível 1**.

2. *Um experimento com peixes envolve cinco tanques...*

Ver resolução do **problema 3** do **nível 1**.

3. *Um tetraedro foi construído tendo como faces quatro triângulos equiláteros recortados de um quadrado...*

Levando-se em conta que em um triângulo equilátero cada ângulo interno tem $60°$, o ângulo indicado por α na figura abaixo só pode ser de $30°$. Assim, os quatro triângulos obtusângulos são isósceles.



Denotando por ℓ o lado dos triângulos equiláteros, o lado menor dos triângulos obtusângulos mede $1-\ell$. Assim, do triângulo com um lado tracejado, medindo $\ell/2$ na figura, tem-se

$$\frac{\ell/2}{1-\ell} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

No tetraedro, a altura, h é a medida do segmento que une um vértice ao centro da face oposta. Nesse caso, forma-se um triângulo retângulo em que a hipotenusa é uma das arestas do tetraedro, um dos catetos é $2/3$ da altura da base e o outro cateto é a altura do tetraedro. Por Pitágoras,

$$\ell^2 = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{2\ell^2}{3} \Rightarrow h = \ell\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Assim, o tetraedro sendo uma pirâmide, seu volume é um terço do produto da área da base pela altura, ou seja,

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\cdot\ell\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{12} = \left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^3\frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4(1+\sqrt{3})^3}\,.$$

4. *Duas pessoas jogam "par ou ímpar"...*

(a) O jogador que escolheu "par" ganha se os dois jogadores apresentarem números ímpares ou se ambos apresentarem números pares. O que escolheu "ímpar" ganha se um deles apresentar um número par e o outro ímpar. Denotando por (m, n) cada possível jogada, sendo m o número de dedos apresentado por um dos jogadores e n o número apresentado pelo outro, há 25 possíveis resultados igualmente prováveis: (1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (5, 3), (5, 4), (5, 5). Em 9 destes 25 resultados, ambos jogadores apresentam números ímpares, em 4 os dois apresentam números pares e nos outros 12 um apresenta par e o outro ímpar. Assim, a probabilidade de o jogador que escolheu "par" ganhar é $13/25$, contra $12/25$ para o outro jogador. Logo, se ambos jogarem aleatoriamente, quem escolheu "par" tem maior probabilidade de ganhar.

(b) Como há três possibilidades de números ímpares e duas de números pares para cada jogador mostrar, se qualquer jogador jogar aleatoriamente, é mais provável que mostre um número ímpar. Sendo assim, o jogador que escolheu "par" terá mais chances se também apresentar um número ímpar.

(c) Para maximizar suas chances de ganhar, o jogador que escolheu "ímpar", assumindo que o oponente tem maior probabilidade de jogar um número ímpar que um número par, jogaria um número par. Já o jogador que escolheu "par", como explicado no item **(b)**, jogaria um número ímpar. Portanto, nesse caso, ganharia o jogador que escolheu ímpar.

5. *Apenas conhecendo-se o perímetro e a área de um triângulo não se pode determinar, de maneira única, as medidas de seus lados...*

(a) Denotando por $2b$ a base do triângulo isósceles e por a a medida dos outros dois lados, tem-se o perímetro $P = 2b + 2a$ e a altura h é tal que $a^2 = b^2 + h^2$, de forma que a área é

$$A = 2b \cdot h/2 = b\sqrt{a^2 - b^2} = b\sqrt{(a+b)(a-b)} = b\sqrt{\frac{P}{2}\left(\frac{P}{2} - 2b\right)}$$

ou, denotando o perímetro P por $2p$, sendo p o semiperímetro, tem-se

$$A = b\sqrt{p(p-2b)} \quad \Rightarrow \quad A^2 = b^2 p(p-2b) \quad \Rightarrow \quad 2pb^3 - p^2b^2 + A^2 = 0\,,$$

que é a equação a ser satisfeita por b, metade da base de um triângulo isósceles com área A e perímetro $2p$. No caso deste item, tem-se um dos triângulos com $b = 5\,\text{cm}$ e $a = 14\,\text{cm}$. Consequentemente, $P = 38 \Rightarrow p = 19$ e $A = 15\sqrt{19}$ e a equação acima torna-se

$$38\,b^3 - 361\,b^2 + 4275 = 0,$$

Para a qual uma das raízes já é conhecida ($b = 5$). Assim, fatorando a equação polinomial acima, de grau 3, por $(b-5)$ obtem-se

$$(b-5)(38\,b^2 - 171\,b - 855) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 19(b-5)(2\,b^2 - 9\,b + 5\cdot 9) = 0,$$

De onde fica mais fácil obter as outras duas raízes como

$$b = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 4\cdot 2\cdot 45}}{2\cdot 2} = \frac{9 \pm 3\sqrt{9 + 4\cdot 2\cdot 5}}{4} = \frac{15}{2} \quad \text{ou} \quad -3$$

Para $b = 7{,}5$, obtém-se $a = 19 - b = 11{,}5$, logo outro triângulo equilátero com mesma área e perímetro que o do enunciado, tem a base com 15 cm e os outros dois lados medindo 11,5 cm.

(b) Não. Observando a equação cúbica $2pb^3 - p^2b^2 + A^2 = 0$ obtida no item anterior, nota-se que o produto das raízes é $-\frac{A^2}{2p} < 0$ e então, necessariamente, a equação possui um número ímpar de raízes negativas. Logo há no máximo dois valores positivos distintos para b satisfazendo essa equação tornando-se impossível obter mais do que dois triângulos isósceles distintos, com área A e perímetro P.

6. *De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de 7 cm×3 cm...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

(c) O número máximo de cartões não pode passar de 201, uma vez que $65^2 = 4225 = 201 \cdot 21 + 4$.

Tentando a mesma estratégia dos itens anteriores, poderíamos multiplicar por 5 as medidas do item **(a)**, escrevendo $65 = 35 + 30 = 5\cdot 7 + 10\cdot 3$, de forma que podem ser formados quatro blocos com 50 cartões cada e medindo 35×30. Encaixando-os como no item **(a)** resta um quadrado central com 5 cm de lado. Isso daria $4\cdot 50 = 200$ cartões e sobraria $25\,\text{cm}^2$. Como esta sobra é maior que a área de um cartão, podemos tentar outras formas de arranjar os retângulos.

Seguindo a dica dada no enunciado, nota-se que, colocando lado a lado n dos cartões, ao longo do lado mais comprido, cobre-se um retângulo $7\times 3n$. Empilhando três desses retângulos, cobre-se um retângulo $21\times 3n$, $n \geq 1$. Justapondo um desses retângulos a outro retângulo 7×21 é fácil cobrir um retângulo de $21\times(7 + 3n) = 21\times[1 + 3(2 + n)]$, que contempla qualquer número da forma $3k + 1$ maior que 6. Analogamente, justapondo dois retângulos 7×21 a um retângulo $7\times 3n$ cobre-se um retângulo de $21\times(14 + 3n) = 21\times[2 + 3(4 + n)]$, em que o lado diferente de 21 pode ser qualquer número da forma $3k + 2$ maior que 12. Como todo número inteiro é de uma das três formas $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$, segue-se a afirmação feita no enunciado.

Munidos desse resultado, podemos recortar do quadrado 65×65 um retângulo 21×65 (de onde recortam-se exatamente 65 cartões). Do papel restante, medindo 44×65, recortamos outra faixa de 44×21 (44 cartões). Resta, então, um quadrado 44×44, de onde se podem recortar 4 retângulos de 21×23 à maneira do que foi feito no item **(a)**, de onde são obtidos mais 92 cartões e, ao final, restará apenas um quadrado 2×2. Portanto é possível recortar 201 cartões.