

Nível 1

1. Um fabricante de sabão em pó embalava o produto em caixas de papel com $5\text{ cm} \times 16\text{ cm} \times 24\text{ cm}$ e percebeu que poderia economizar papel na embalagem modificando suas medidas, mas mantendo a mesma capacidade (mesmo volume). Consciente de que consumir menos papel representa um ganho ambiental e financeiro mas levando em consideração também a comodidade de manuseio da caixa, o fabricante passou a utilizar caixas com $8\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 12\text{ cm}$. Considerando que cada metro quadrado do papel cartão utilizado pesa 300g e que o fabricante produz um milhão de caixas por ano, calcule quantas toneladas de papel estão sendo economizadas anualmente com a nova embalagem.

2. Como prêmio por algumas tarefas realizadas, Dona Zuleide deu aos filhos, André, Beto, e Carlos R\$ 7,50 para comprarem bolinhas, com a condição de que metade das bolinhas seriam para André, Beto deveria ficar com metade da quantidade de André e Carlos com metade da quantidade de Beto. Eles gastaram todo o dinheiro em bolinhas, a 50 centavos cada, mas não conseguiram fazer a divisão como a mãe tinha ordenado. Foram, então, pedir ajuda ao primo Daniel, que resolveu o problema acrescentando uma de suas bolinhas às dos outros meninos e, depois de reparti-las como D. Zuleide mandou, ainda sobraram bolinhas, que ficaram para Daniel.

- Quantas bolinhas Daniel ganhou com esta partilha?
- Com as mesmas condições, se o total de bolinhas a repartir fosse 2011, quantas bolinhas, no mínimo, Daniel teria que acrescentar para possibilitar a divisão, e quantas bolinhas ele ganharia ao final?

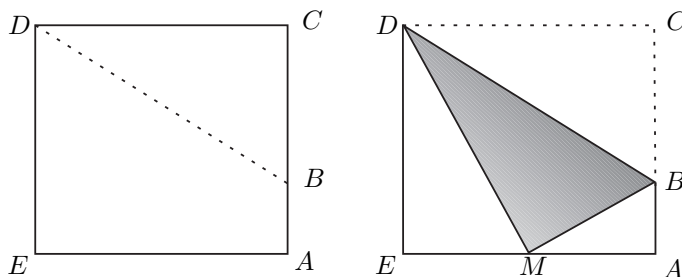
3. João recebeu a tarefa de armazenar 6850 CDs em caixas com a condição de que todas as caixas utilizadas fiquem completamente preenchidas, sem sobrar espaço. As caixas podem ser de três tamanhos disponíveis, de acordo com a tabela abaixo

Tamanho da caixa	Capacidade (número de CDs)
pequena	50
média	65
grande	70

- Qual é o menor número de caixas necessário para realizar a tarefa?
 - Se João utilizou exatamente 100 caixas, quantas, no máximo, foram das grandes?
4. Uma avenida de mão dupla possui dois semáforos, A e B , distantes 400 metros um do outro. O semáforo A tem um ciclo de um minuto, ficando 30 segundos no verde e 30 segundos no vermelho, alternadamente (considere que o sinal amarelo está incluído no tempo do verde).

- Quanto tempo um veículo leva para percorrer a distância entre os dois semáforos a 60 km/h ?
- Qual o maior intervalo de tempo que o semáforo B poderia permanecer no vermelho, em cada ciclo, de modo que os veículos que trafeguem a 60 km/h , em qualquer sentido, e que percorreriam a avenida sem ter que parar em semáforo, caso não existisse o semáforo B , continuem não tendo que parar.

5. Uma folha retangular de papel é dobrada ao longo da linha tracejada DB mostrada na figura a seguir, de modo que o vértice C fique sobre o ponto M , que é o ponto médio do lado AE .



Nestas condições, determine a medida do ângulo \widehat{DBM} ; (Sugestão: Compare as medidas dos segmentos \overline{CM} e \overline{DM})

6. Dos números terminados em 3 entre 0 e 100, quantos não são múltiplos de 3 e nem primos? E entre 0 e 1000?

Nível 2

1. Como prêmio por algumas tarefas realizadas, Dona Zuleide deu aos filhos, André, Beto, e Carlos R\$ 7,50 para comprarem bolinhas, com a condição de que metade das bolinhas seriam para André, Beto deveria ficar com metade da quantidade de André e Carlos com metade da quantidade de Beto. Eles gastaram todo o dinheiro em bolinhas, a 50 centavos cada, mas não conseguiram fazer a divisão como a mãe tinha ordenado. Foram, então, pedir ajuda ao primo Daniel, que resolveu o problema acrescentando uma de suas bolinhas às dos outros meninos e, depois de reparti-las como D. Zuleide mandou, ainda sobraram bolinhas, que ficaram para Daniel.

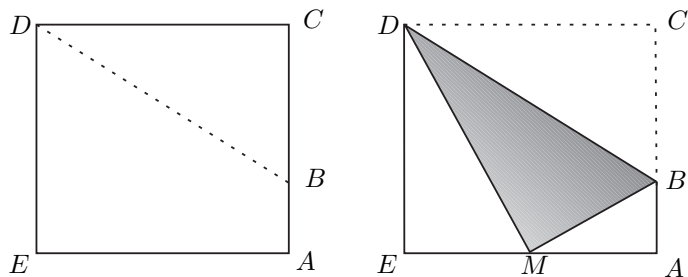
- Quantas bolinhas Daniel ganhou com esta partilha?
- Com as mesmas condições, se o total de bolinhas a repartir fosse 2011, quantas bolinhas Daniel teria que acrescentar para possibilitar a divisão, de tal forma que ele ganhasse 226 bolinhas ao final?

2. João recebeu a tarefa de armazenar 6850 CDs em caixas com a condição de que todas as caixas utilizadas fiquem completamente preenchidas, sem sobrar espaço. As caixas podem ser de três tamanhos disponíveis, de acordo com a tabela abaixo

Tamanho da caixa	Capacidade (número de CDs)
pequena	50
média	65
grande	70

- Qual é o menor número de caixas necessário para realizar a tarefa?
- Se João utilizou exatamente 100 caixas, quantas, no máximo, foram das grandes?

3. Uma folha retangular de papel é dobrada ao longo da linha tracejada DB mostrada na figura a seguir, de modo que o vértice C fique sobre o ponto M , que é o ponto médio do lado AE .



Considerando essas condições:

- Determine a medida do ângulo $D\hat{B}M$;
- Admitindo que o lado DE mede 15 cm, calcule a área da folha de papel.

4. Uma avenida de mão dupla possui dois semáforos, A e B , distantes 400 metros um do outro. O semáforo A tem um ciclo de um minuto, ficando 30 segundos no verde e 30 segundos no vermelho, alternadamente (considere que o sinal amarelo está incluído no tempo do verde).

- Quanto tempo um veículo leva para percorrer a distância entre os dois semáforos a 60 km/h ?
- Qual o maior intervalo de tempo que o semáforo B poderia permanecer no vermelho, em cada ciclo, de modo que os veículos que trafeguem a 60 km/h , em qualquer sentido, e que percorreriam a avenida sem ter que parar em semáforo, caso não existisse o semáforo B , continuem não tendo que parar.

5. Dos números terminados em 3 entre 0 e 100, quantos não são múltiplos de 3 e nem primos? E entre 0 e 1000?

6.

- Dados dois números reais positivos x e y , mostre que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$;
- Se a, b, c, d são números reais positivos cujo produto é igual a 1, mostre que

$$a+b+c+d \geq 4 \quad \text{e} \quad (1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \geq 16.$$

Nível 3

1. João recebeu a tarefa de armazenar 6850 CDs em caixas com a condição de que todas as caixas utilizadas fiquem completamente preenchidas, sem sobrar espaço. As caixas podem ser de três tamanhos disponíveis, de acordo com a tabela abaixo

Tamanho da caixa	Capacidade (número de CDs)
pequena	50
média	65
grande	70

- Qual é o menor número de caixas necessário para realizar a tarefa?
- Se João utilizou exatamente 100 caixas, quantas, no máximo, foram das grandes?

2. Considere o seguinte conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$.

- De quantas maneiras podemos escolher 3 números distintos em A de modo que sua soma seja múltiplo de 2?
- De quantas maneiras podemos escolher 3 números distintos em A de modo que sua soma seja múltiplo de 3?

3. Seja $ABCD$ um quadrilátero com 18 cm^2 de área, tal que o lado AB é paralelo ao lado CD e perpendicular ao lado AD , com $\overline{AB} = 2\overline{CD}$. Sabendo que um círculo pode ser desenhado tangenciando todos os lados do quadrilátero, encontre o raio deste círculo.

4. Uma avenida de mão dupla possui dois semáforos, A e B , distantes 400 metros um do outro. O semáforo A tem um ciclo de um minuto, ficando 30 segundos no verde e 30 segundos no vermelho, alternadamente (considere que o sinal amarelo está incluído no tempo do verde).

- Quanto tempo um veículo que trafega a 60 km/h demoraria para percorrer a distância entre os dois semáforos;
- Qual o maior intervalo de tempo que o semáforo B poderia permanecer no vermelho, em cada ciclo, de modo que os veículos que trafeguem a 60 km/h , em qualquer sentido, e que percorreriam a avenida sem ter que parar em semáforo, caso não existisse o semáforo B , continuem não tendo que parar.

5. Entre 0 e 1000, quantos dos números terminados em 3 não são múltiplos de 3 e nem primos?

6. Um vidraceiro vende espelhos por 200 reais o metro quadrado. Ele tem em seu estoque um pedaço de espelho no formato de um triângulo retângulo e isósceles com catetos medindo 1m e deseja obter, pelo corte desse triângulo, dois espelhos retangulares para vender. Determine as dimensões desses dois retângulos para que eles dêem o maior lucro possível ao vidraceiro.