Nível 1

1. Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso: agrupando-as três a três sobraram duas bolinhas; agrupando-as quatro a quatro, também sobraram duas e o mesmo aconteceu quando ele as agrupou cinco a cinco e seis a seis.

(a) Se o número de bolinhas não chega a 100, quantas bolinhas Lucas possui?

(b) De todos os números que tem a propriedade descrita no enunciado, ou seja, suas divisões por 3, 4, 5 e 6 deixam resto 2, qual é o que fica mais próximo de 2012?

2. Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1. Por exemplo $30 = 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1$ é a partição em uns do número 30 e possui dez parcelas.

(a) Qual é a partição em uns de 2012?

(b) Dentre os números menores que 2012 determine aquele cuja partição em uns tem o maior número de parcelas.

3. Um experimento com peixes envolve cinco tanques, numerados de 1 a 5, contendo, inicialmente, as quantidades de peixes descritas na tabela abaixo.

Tanque	1	2	3	4	5
Número de Peixes	100	200	300	400	500

Uma vez por dia os seguintes passos são realizados:

- um peixe é retirado do tanque 1 e colocado no tanque 2;
- dois peixes são retirados do tanque 2 e colocados no tanque 3;
- três peixes são retirados do tanque 3 e colocados no tanque 4;
- quatro peixes são retirados do tanque 4 e colocados no tanque 5;

Se algum dos tanques não tiver mais peixes, o passo correspondente é ignorado e passa-se ao passo seguinte.

(a) Quantos dias são necessários para que todos os peixes estejam no tanque 5?

(b) Quantos peixes estarão no tanque 2 ao final do 149º dia?

(c) Quantos peixes haverá em cada tanque ao final do 172º dia?

4. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$. Determine qual é o número máximo de cartões que se pode obter se as medidas da folha de papel forem

(a) $13\,\text{cm} \times 13\,\text{cm}$

(b) $130\,\text{cm} \times 130\,\text{cm}$

5. Em um certo carro de passeio com tração dianteira os pneus dianteiros gastam-se mais rapidamente que os traseiros de modo que, se não for feito um rodízio dos pneus, os que rodam na dianteira duram 40.000 km, enquanto que os traseiros duram 50.000 km. Uma estratégia que pode ser usada para que os quatro pneus terminem sua vida útil ao mesmo tempo é o rodízio, que consiste de passar os pneus traseiros para a frente e os dianteiros para a traseira depois de terem rodado por algum tempo.

Começando com quatro pneus novos, se o rodízio for feito apenas uma vez, com qual quilometragem ele deve ser feito para que todos os pneus terminem sua vida útil ao mesmo tempo?

6. O maior círculo que se pode desenhar dentro de um quadrado passa pelos pontos médios dos lados do quadrado e ocupa, aproximadamente, 78,5% da área do quadrado.

O maior quadrado que se pode desenhar dentro de um círculo tem seus quatro vértices sobre o contorno do círculo. Neste caso, quanto da área do círculo é ocupada pelo quadrado?

Nível 2

1. Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso: agrupando-as duas a duas sobrou uma bolinha, agrupando-as três a três sobraram duas; quatro a quatro, sobraram três; cinco a cinco sobraram quatro e seis a seis sobraram cinco.

(a) Se o número de bolinhas não chega a 100, quantas bolinhas Lucas possui?

(b) De todos os números que tem a propriedade descrita no enunciado, ou seja, suas divisões por 2, 3, 4, 5 e 6 deixam resto 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, qual é o que fica mais próximo de 2012?

2. Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1. Por exemplo $30 = 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1$ é a partição em uns do número 30 e possui dez parcelas.

(a) Qual é a partição em uns de 2012?

(b) Dentre os números menores que 2012 determine aquele cuja partição em uns tem o maior número de parcelas.

3. Um experimento com peixes envolve cinco tanques, numerados de 1 a 5, contendo, inicialmente, as quantidades de peixes descritas na tabela abaixo.

Tanque	1	2	3	4	5
Número de Peixes	100	200	300	400	500

Uma vez por dia os seguintes passos são realizados:

- um peixe é retirado do tanque 1 e colocado no tanque 2;
- dois peixes são retirados do tanque 2 e colocados no tanque 3;
- três peixes são retirados do tanque 3 e colocados no tanque 4;
- quatro peixes são retirados do tanque 4 e colocados no tanque 5;

Se algum dos tanques não tiver mais peixes, o passo correspondente é ignorado e passa-se ao passo seguinte.

(a) Quantos dias são necessários para que todos os peixes estejam no tanque 5?

(b) Quantos peixes estarão no tanque 2 ao final do 149º dia?

(c) Quantos peixes haverá em cada tanque ao final do 172º dia?

4. O maior círculo que se pode desenhar dentro de um quadrado passa pelos pontos médios dos lados do quadrado e ocupa, aproximadamente, 78,5% da área do quadrado. O maior quadrado que se pode desenhar dentro de um círculo tem seus quatro vértices sobre o contorno do círculo. Quanto da área do círculo é ocupada por esse quadrado?

5. Usualmente o perímetro e a área de um retângulo são calculados conhecendo-se as medidas dos lados. Entretanto, a recíproca desse fato também é verdadeira, isto é, as medidas dos lados de um retângulo podem ser determinadas conhecendo-se seu perímetro e sua área, embora nem sempre exista um retângulo cujo perímetro e área sejam dois números dados arbitrariamente.

a) Determine os lados de um retângulo com perímetro medindo 30 cm e área medindo 56 cm^2;

b) Determine que relação dois números, A e P, precisam satisfazer para que exista um retângulo com área A e perímetro P.

6. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$. Determine qual é o número máximo de cartões que se pode obter se as medidas da folha de papel forem

(a) $13\,\text{cm} \times 13\,\text{cm}$

(b) $130\,\text{cm} \times 130\,\text{cm}$

(c) $30\,\text{cm} \times 30\,\text{cm}$

Nível 3

1. Chamemos de "partição em uns" de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1. Por exemplo $30 = 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1$ é a partição em uns do número 30 e possui dez parcelas.

(a) Qual é a partição em uns de 2012?

(b) Dentre os números menores que 2012 determine aquele cuja partição em uns tem o maior número de parcelas.

2. Um experimento com peixes envolve cinco tanques, numerados de 1 a 5, contendo, inicialmente, as quantidades de peixes descritas na tabela abaixo.

Tanque	1	2	3	4	5
Número de Peixes	100	200	300	400	500

Uma vez por dia os seguintes passos são realizados:

- um peixe é retirado do tanque 1 e colocado no tanque 2;
- dois peixes são retirados do tanque 2 e colocados no tanque 3;
- três peixes são retirados do tanque 3 e colocados no tanque 4;
- quatro peixes são retirados do tanque 4 e colocados no tanque 5;

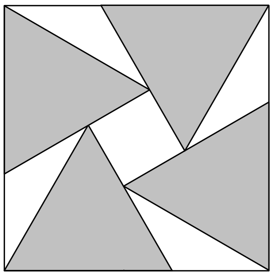
Se algum dos tanques não tiver mais peixes, o passo correspondente é ignorado e passa-se ao passo seguinte.

(a) Quantos dias são necessários para que todos os peixes estejam no tanque 5?

(b) Quantos peixes estarão no tanque 2 ao final do 149º dia?

(c) Quantos peixes haverá em cada tanque ao final do 172º dia?

3. Um tetraedro foi construído tendo como faces quatro triângulos equiláteros recortados de um quadrado com área de $1\,\text{m}^2$ como indicado na figura abaixo. Calcule o volume do tetraedro.



4. Duas pessoas jogam "par ou ímpar" da seguinte forma: um dos jogadores escolhe a opção "par" e o outro "ímpar". Então, num mesmo instante, cada jogador apresenta, com os dedos, um número de um a cinco. Se o total de dedos mostrados for par, ganha o jogador que escolheu "par", caso contrário o outro jogador ganha.

(a) Se os dois jogadores escolherem os números que vão jogar de maneira aleatória, com qualquer um dos cinco números tendo a mesma probabilidade de ser escolhido, qual dos dois tem maior chance de ganhar?

(b) Se o jogador que escolheu "par" assumir que o outro jogará aleatoriamente, que estratégia pode adotar para maximizar suas chances de ganhar?

(c) Se ambos os jogadores pensarem como no item **(b)**, ou seja, assumirem que o oponente jogará aleatoriamente e adotarem esse tipo de estratégia para tentar aumentar suas chances, qual dos dois ganha?

5. Apenas conhecendo-se o perímetro e a área de um triângulo não se pode determinar, de maneira única, as medidas do mesmo. Em geral, um triângulo qualquer (não equilátero) pode ser "deformado" continuamente de modo a se obter uma infinidade de triângulos não congruentes, todos tendo perímetro e área iguais aos do triângulo inicial.

(a) Considere o triângulo isósceles com base medindo 14 cm e os outros dois lados medindo 10 cm cada um. Determine os lados de outro triângulo isósceles (não congruente com esse) que tenha mesmo perímetro e mesma área que esse.

(b) Existe algum par de valores de área e perímetro para os quais é possível obter três triângulos isósceles, dois a dois não congruentes, com mesma área e perímetro?

6. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\,\text{cm} \times 3\,\text{cm}$. Determine qual é o número máximo de cartões que se pode obter se as medidas da folha de papel forem

(a) $13\,\text{cm} \times 13\,\text{cm}$

(b) $130\,\text{cm} \times 130\,\text{cm}$

(c) $65\,\text{cm} \times 65\,\text{cm}$ (DICA: verifique que qualquer retângulo no formato $21 \times n$ com $n \geq 12$ pode ser coberto de maneira exata, ou seja, sem sobra nem falta, por retângulos 7×3.)