

**Nível 1**

1. Na brincadeira conhecida como “telefone sem fio”, feita com pessoas enfileiradas, a primeira pessoa cochicha uma frase ao ouvido da segunda, que transmite para a terceira pessoa do mesmo modo, e assim, sucessivamente, até chegar à última pessoa, que revela qual foi a mensagem recebida.

Um grupo de 9 amigos resolveu fazer uma brincadeira semelhante, mas com números de 1 a 99 e com as seguintes regras: se falarem ao seu ouvido um número menor que 50 fale para a próxima pessoa o dobro desse número, mas se o número que chegar a você for 50 ou mais, inverta a ordem dos dígitos do número e passe adiante. Por exemplo, se chegar ao seu ouvido o número 60, cochiche para a próxima pessoa o número 6 (= 06). O desafio da nona pessoa é acertar qual foi o número inicial, falado pela primeira pessoa.

Considerando que não ocorram erros de compreensão ou de cálculos, determine quais são os possíveis valores para o número falado pela primeira pessoa, se o que chegou ao ouvido da nona pessoa foi

(a) 48

(b) 68

2. Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água. Com esta diluição, a quantidade de suco concentrado que eles têm permite preparar exatamente 400 ml de suco para cada convidado.

(a) Nestas condições, cada litro de suco concentrado é suficiente para preparar suco para quantas pessoas?

(b) Na última hora avisaram que virão à festa cinco pessoas a mais que o previsto. O líder da equipe pensou rapidamente e concluiu que basta mudarem a diluição do suco para cinco partes de água para cada parte de suco concentrado, e novamente terão o equivalente a 400 ml por pessoa. Diante destas informações, qual era o número de convidados previsto originalmente?

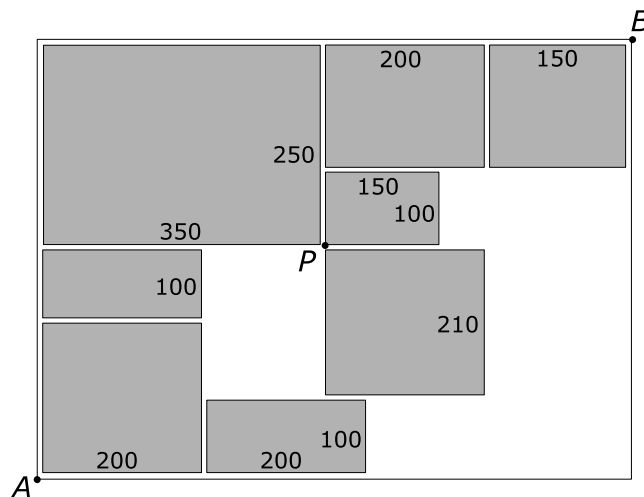
3. Um centro de pesquisas é constituído de vários prédios dispostos em uma área retangular, conforme indica o mapa a seguir.

No mapa, os retângulos sombreados indicam os prédios, os números indicam as medidas dos lados, em metros, e os espaços em branco são calçamentos por onde se pode caminhar, inclusive nas ruas entre os prédios.

Um pedestre, inicialmente no ponto indicado por *P*, deseja caminhar a menor distância possível para chegar a uma das duas saídas, indicadas por *A* e *B*, onde há pontos de ônibus,

Determine qual das duas saídas, *A* ou *B*, deve ser escolhida e porque.

4. O painel do computador de bordo de um certo carro está configurado para exibir dois números quando o carro está em funcionamento. O primeiro número, indicado no painel por “Dist.”, é a distância percorrida, em quilômetros, desde a última vez que o contador foi zerado. O segundo número é o



desempenho médio, indicado por “DM”, e é o resultado da divisão da distância percorrida, em quilômetros, pela quantidade de combustível consumida no percurso, em litros. Ambos os números são constantemente atualizados durante o funcionamento do carro. No início de uma viagem, os contadores foram zerados e o painel indicava o seguinte:

Dist.: 0,0 km  
DM: --- km/ℓ

Em um certo momento da viagem o motorista percebeu que, curiosamente, o painel indicava dois números iguais

Dist.: 12,2 km  
DM: 12,2 km/ℓ

Existe um número máximo de vezes em que este tipo de coincidência dos dois valores pode ocorrer na mesma viagem? Se existe, esse número pode ser determinado?

5. Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo, no sentido horário, de maneira que a primeira pessoa retira um amendoim e passa o pacote à pessoa à sua esquerda. Esta retira dois amendoins e passa o pacote à esquerda. A próxima pessoa retira três amendoins e assim, sucessivamente e podendo dar mais de uma volta em torno do círculo, a distribuição continua com a quantidade retirada aumentando em um amendoim a cada nova retirada ou, caso a quantidade de amendoins no pacote não seja mais suficiente para isso, a última retira todos os amendoins restantes no pacote.

Considerando que, ao final da distribuição, a pessoa que ficou com mais amendoins tenha exatamente 20 amendoins a mais que a pessoa que ficou com menos amendoins, calcule a quantidade mínima de amendoins que deveria haver no pacote no início da distribuição.

6. Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram, cada time jogando contra cada um dos outros duas vezes, uma em sua própria cidade e a outra na cidade do adversário. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto e cada derrota 0 pontos. Se, ao final da primeira fase o total dos pontos somados por todas as equipes foi de 242, quantas partidas desta fase terminaram empatadas?

## Nível 2

1. Na brincadeira conhecida como “telefone sem fio”, feita com pessoas enfileiradas, a primeira pessoa cochicha uma frase ao ouvido da segunda, que transmite para a terceira pessoa do mesmo modo, e assim, sucessivamente, até chegar à última pessoa, que revela qual foi a mensagem recebida.

Um grupo de 9 amigos resolveu fazer uma brincadeira semelhante, mas com números de 1 a 99 e com as seguintes regras: se falarem ao seu ouvido um número menor que 50 fale para a próxima pessoa o dobro desse número, mas se o número que chegar a você for 50 ou mais, inverta a ordem dos dígitos do número e passe adiante. Por exemplo, se chegar ao seu ouvido o número 60, cochiche para a próxima pessoa o número 6 (= 06). O desafio da nona pessoa é acertar qual foi o número inicial, falado pela primeira pessoa.

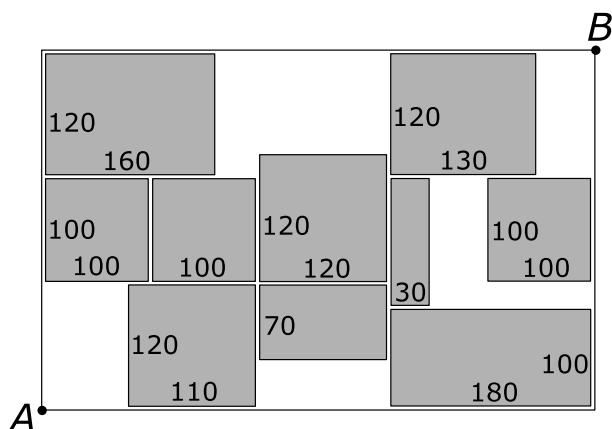
Considerando que não ocorram erros de compreensão ou de cálculos, determine quais são os possíveis valores para o número falado pela primeira pessoa, se o que chegou ao ouvido da nona pessoa foi

- (a) 48  
(b) 58

2. Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água. Com esta diluição, a quantidade de suco concentrado que eles têm permite servir exatamente 400 ml de suco para cada convidado.

- (a) Nestas condições, cada litro de suco concentrado é suficiente para preparar suco para quantas pessoas?  
(b) Na última hora avisaram que virão à festa cinco pessoas a mais que o previsto. O líder da equipe pensou rapidamente e concluiu que basta mudarem a diluição do suco para cinco partes de água para cada parte de suco concentrado, e novamente terão o equivalente a 400 ml por pessoa. Diante destas informações, qual era o número de convidados previsto originalmente?

3. Um centro de pesquisas é constituído de vários prédios dispostos em uma área retangular, conforme indica o mapa a seguir.



No mapa, os retângulos sombreados indicam os prédios, os números indicam as medidas dos lados, em metros, e os espaços em branco são calçamentos por onde se pode caminhar, inclusive nas ruas entre os prédios.

Um pedestre deseja caminhar do ponto A ao ponto B percorrendo a menor distância possível.

Determine, aproximadamente, qual é essa distância mínima e indique no mapa qual caminho deve ser seguido.

4. O painel do computador de bordo de um certo carro está configurado para exibir dois números quando o carro está em funcionamento. O primeiro número, indicado no painel por “Dist.”, é a distância percorrida, em quilômetros, desde a última vez que o contador foi zerado. O segundo número é o desempenho médio, indicado por “DM”, e é o resultado da divisão da distância percorrida, em quilômetros, pela quantidade de combustível consumida no percurso, em litros. Ambos os números são constantemente atualizados durante o funcionamento do carro. No início de uma viagem, os contadores foram zerados e o painel indicava o seguinte:

Dist.:	0,0 km
DM:	--- km/ℓ

Em um certo momento da viagem o motorista percebeu que, curiosamente, o painel indicava dois números iguais

Dist.:	12,2 km
DM:	12,2 km/ℓ

Existe um número máximo de vezes em que este tipo de coincidência dos dois valores pode ocorrer na mesma viagem? Se existe, esse número pode ser determinado?

5. Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram, cada time jogando contra cada um dos outros duas vezes, uma em sua própria cidade e a outra na cidade do adversário. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto e cada derrota 0 pontos. Se, ao final da primeira fase, o total dos pontos somados por todas as equipes foi de 242, quantas partidas desta fase terminaram empatadas?

6. Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo, no sentido horário, de maneira que a primeira pessoa retira um amendoim e passa o pacote à pessoa à sua esquerda. Esta retira dois amendoins e passa o pacote à esquerda. A próxima pessoa retira três amendoins e assim, sucessivamente e podendo dar mais de uma volta em torno do círculo, a distribuição continua com a quantidade retirada aumentando em um amendoim a cada nova retirada ou, caso a quantidade de amendoins no pacote não seja mais suficiente para isso, a última retira todos os amendoins restantes no pacote.

Considerando que, ao final da distribuição, a pessoa com mais amendoins tenha recebido exatamente 20 amendoins a mais que a pessoa que ficou com menos amendoins,

- (a) determine a quantidade mínima de amendoins que deveria haver inicialmente no pacote.  
(b) Determine a quantidade máxima de amendoins que poderia haver no pacote.

## Nível 3

1. Na brincadeira conhecida como “telefone sem fio”, feita com pessoas enfileiradas, a primeira pessoa cochicha uma frase ao ouvido da segunda, que transmite para a terceira pessoa do mesmo modo, e assim, sucessivamente, até chegar à última pessoa, que revela qual foi a mensagem recebida.

Um grupo de 9 amigos resolveu fazer uma brincadeira semelhante, mas com números de 1 a 99 e com as seguintes regras: se você receber um número menor que 50 fale para a próxima pessoa o dobro desse número enquanto que, se o número que chegar a você for 50 ou mais, inverta a ordem dos dígitos do número e passe adiante. Por exemplo, se chegar ao seu ouvido o número 60, cochiche para a próxima pessoa o número 6 (= 06). O desafio da nona pessoa é acertar qual foi o número inicial, falado pela primeira pessoa.

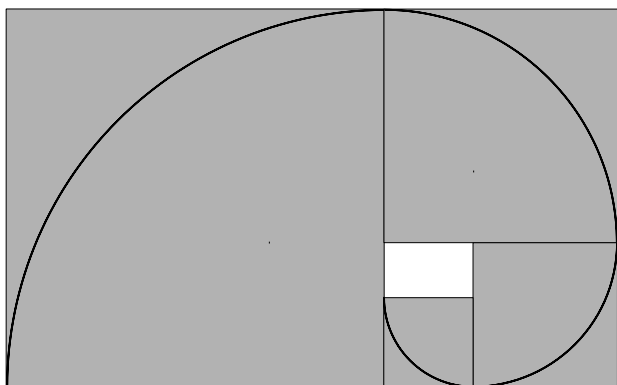
Considerando que não ocorram erros de compreensão ou de cálculos,

- (a) determine os possíveis valores para o número falado pela primeira pessoa, se o que chegou ao ouvido da nona pessoa foi 58.
- (b) Determine qual é o menor número que pode chegar ao ouvido da nona pessoa.

2. Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram, cada time jogando contra cada um dos outros duas vezes, uma em sua própria cidade e a outra na cidade do adversário. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto e cada derrota 0 pontos. Se, ao final da primeira fase o total dos pontos somados por todas as equipes foi de 242, quantas partidas desta fase terminaram empatadas?

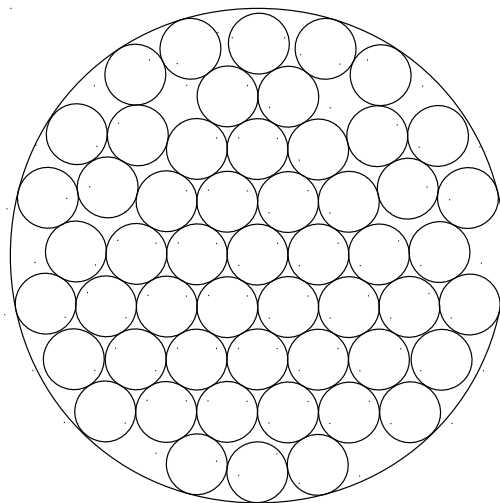
3. Diz-se que dois números estão na razão áurea, se a razão entre o menor e o maior, for igual à razão entre o maior e a soma dos dois. Um retângulo em que os lados estejam na razão áurea é chamado de retângulo áureo e é sempre possível dividi-lo em um quadrado e um retângulo menor, que também é áureo.

A logomarca da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) é a figura representada a seguir, formada pela subdivisão de um retângulo áureo inicial em um quadrado e um retângulo menor. No interior do quadrado, desenha-se um arco de um quarto de círculo, com raio igual ao lado do quadrado. Repete-se o mesmo procedimento para o retângulo menor, resultante da divisão anterior e assim, sucessivamente, forma-se uma espiral pela junção dos arcos de círculo.



Esta logomarca utiliza uma sequência com apenas quatro quadrados. Então, se a figura for feita de forma que cada lado do quadrado maior tenha um metro e considerando  $\pi \approx 3,14$  e  $\sqrt{5} \approx 2,24$ ,

- (a) calcule o comprimento aproximado da parte da espiral que aparece na logomarca.
  - (b) Se a construção continuasse, chegando a 2013 quadrados, qual seria, aproximadamente, o comprimento da espiral?
4. Determine todos os possíveis trios de números naturais  $a$ ,  $b$  e  $c$ , tais que  $(a^4 - b^4) \cdot c = 2013$ .
5. Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo, no sentido horário, de maneira que a primeira pessoa retira um amendoim e passa o pacote à pessoa à sua esquerda. Esta retira dois amendoins e passa o pacote à esquerda. A próxima pessoa retira três amendoins e assim, sucessivamente e podendo dar mais de uma volta em torno do círculo, a distribuição continua com a quantidade retirada aumentando em um amendoim a cada nova retirada ou, caso a quantidade de amendoins no pacote não seja mais suficiente para isso, a última retira todos os amendoins restantes no pacote.
- (a) Considerando que, ao final da distribuição, a pessoa com mais amendoins tenha ficado com exatamente 20 amendoins a mais que a pessoa que ficou com menos amendoins, determine os números mínimo e máximo para a quantidade de amendoins no pacote antes do início da distribuição.
  - (b) Determine a quantidade mínima de amendoins que deveria haver no início para que, ao terminar a distribuição, a pessoa com mais amendoins tenha 2013 amendoins a mais que a pessoa que retirou menos amendoins.
6. Um estudante está construindo um jato de água com fluxo laminar e, para eliminar as turbulências do fluxo, a água deve passar por um curto tubo cilíndrico de PVC preenchido com canudinhos de refresco. A idéia é preencher o tubo com o maior número possível de canudinhos, sem deformá-los, de maneira que a seção transversal do tubo fica com o aspecto ilustrado na figura a seguir.



No presente projeto, o estudante vai usar um tubo de PVC com diâmetro interno de 80 mm e preenchê-lo com canudinhos com 4 mm de diâmetro.

- (a) Se os canudinhos são comercializados em pacotes com 200 unidades, qual é a quantidade mínima de pacotes que serão necessários?
- (b) E se os canudinhos forem comercializados em pacotes com 100 unidades, quantos pacotes serão necessários?