Revista da Olimpíada
n$^{\underline{\circ}}$2, 2001

Universidade Federal de Goiás

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás
Comissão Organizadora

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO
Correio eletrônico: omeg@mat.ufg.br Tel:(62)521-1208 Fax:(62)521-1180
Home-page: http://www.mat.ufg.br/eventos/olimpíadas/

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação (CIP)

(GPT/BC/UFG)

Revista da Olímpiada/Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística.-
n.2 (jan./dez.2001)
Goiânia: Ed. da UFG,2001-
v.
Anual.
ISSN 1518-6075
1.Matemática - Periódicos I. Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística.
CDU:51(05)

Editoração Eletrônica

Heloísio Caetano Mendes

Arte da Capa

Anderson V. Macêdo(Logomarca)
Leonardo M. Pelá

Tiragem

2000 exemplares

Postagem

1° semestre de 2001

Revista da Olimpíada n°2, 2001

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO
Correio eletrônico: omeg@mat.ufg.br
Tel: (62)521-1208 Fax: (62)521-1180
Home-page: http://www.mat.ufg.br/eventos/olimpíadas/

Sumário

Apresentação

Caro Leitor,

A *R*evista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás é uma publicação do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e alunos do ensino fundamental e médio. A mesma tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática*.

Convidamos o leitor que, na leitura dos artigos e problemas resolvidos e propostos, faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado aos seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação.

Lembramos que devemos estar sempre atentos para o fato de que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade.

Esperamos que todos que tenham a oportunidade de lê-la possam apreciar a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, março de 2001

Os Editores.

COLETÂNEA DE PROBLEMAS

João Leonardo M. F. Rabêlo - IME - UFG
(aluno bolsista - PROEC)

Nível 1 (Ensino Fundamental 5ª e 6ª séries)

1. Os adeptos do clube A.B.C celebram, desde 1902 e de 5 em 5 anos, uma festa em honra do seu clube. Por sua vez, os adeptos do clube C.B.A. celebram, desde 1903 e de 7 em 7 anos, uma festa em honra do seu clube. Quais os anos entre 1900 e 2000 em que coincidem as celebrações dos dois clubes?

2. A Maria e o João disputaram um jogo no qual são atribuídos 2 pontos por vitória e deduzido um ponto em caso de derrota, não sendo possível ocorrer empate. Inicialmente cada um deles tinha 5 pontos. Se João ganhou exatamente três partidas e a Maria no final ficou com 10 pontos, quantas partidas disputaram?

3. Um acionista vendeu um lote de ações por 297000 reais tendo um lucro de 10%. No dia seguinte vendeu um lote indêntico por 297000 reais, mas teve um prejuízo de 10%. No total, computando-se ambos os negócios, ele ganhou ou perdeu? Quanto?

4. Branca de Neve distribuiu para os sete anões a sua colheita de 707 cogumelos. Começando pelo menor dos sete e, por ordem crescente das suas alturas, cada anão recebe mais um cogumelo do que o anão anterior. Quantos cogumelos receberá o maior dos anões?

5. Em um grupo de doze bolinhas de mesmo tamanho e cor encontramos uma bolinha que pesa mais que as outras 11, tendo estas o mesmo peso. Como se pode, em três pesadas, numa balança de dois pratos, decobrir qual é a mais pesada?

6. Dona Isolina teve quatro filhos, cada um dos quais lhe deu quatro netos, cada um dos quais lhe deu quatro bisnetos, cada um dos quais teve quatro filhos. Quantos são os descendentes de dona Isolina?

7. Alexandre, consultando a programação de filmes, decidiu gravar *Contato*, cuja duração é de 150 minutos. Para gravar numa fita,

ele começou com velocidade menor (modo SLP, que permite gravar 6 horas) e num dado momento, mudou para a velocidade maior (modo SP, que permite gravar 2 horas), de forma que a fita acabou exatamente no fim do filme. Do início do filme até o momento da mudança do modo de gravação, quantos minutos se passaram?

8. Enquanto era tragado pelas máquinas, Carlitos notou que uma emgrenagem de 8 dentes girava ao redor de outra de 24, fixa. Para controlar a vertigem, distraiu-se com a seguinte questão: quantas voltas a menor deverá dar em torno do seu próprio eixo, para completar uma volta sobre a outra?

9. Pai e filho nasceram no último dia de fevereiro, em anos divisíveis por quatro. Veterano da segunda guerra mundial, o pai jamais se esquecerá do terrível aniversário que teve em 28 de fevereiro de 1940, ano em que o filho completou a metade da idade do pai. Quantos anos tinham então?

10. Enquanto o sono não vinha, Plácido viu dez carneirinhos pularem a cerca, o que levou exatamente 10 minutos. Se a insônia prosseguir e os carneirinhos continuarem no mesmo ritmo, quantos pularão em 1 hora?

Nível 2 (Ensino Fundamental 7ª e 8ª séries)

1. Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas quando eu tinha a tua idade. Quando tu tiveres a minha idade, a soma das nossas idades será de 45 anos. Quais são as nossas idades?

2. Um comerciante compra uma caixa de vinho estrangeiro por R$ 1000,00 e vende pelo mesmo preço, depois de retirar 4 garrafas e aumentar o preço da dúzia em R$ 100,00. Então, qual é o número original de garrafas de vinho na caixa?

3. Deseja-se descobrir quantos degraus são visíveis numa escada rolante. Para isso foi feito o seguinte: duas pessoas começaram a subir a escada juntas, uma subindo um degrau de cada vez enquanto que o outra subia dois. Ao chegar ao topo, a primeira contou 21 degraus enquanto a outra 28. Com esses dados foi possível responder a questão. Quantos degraus são visíveis nessa escada rolante?(Obs: a escada está andando)

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

4. Um número natural de três dígitos se chama tricúbico se é igual a soma dos cubos de seus dígitos. Encontre todos os pares de números consecutivos tais que ambos sejam tricúbicos.

5. A figura representa a quarta parte de um círculo de raio 1. E no arco AB consideramos dois pontos P e Q de forma tal que a reta PQ é paralela a reta AB. Se X e Y são os pontos de interseção da reta PQ com as retas OA e OB respectivamente. Calcular $PX^2 + PY^2$.

6. Três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto (veja [3]), possuem exatamente quatro domingos cada um. Prove que um destes meses é fevereiro.

7. Aos vértices de um cubo são atribuidos os números de 1 a 8 de modo que os conjuntos dos números correspondentes aos vértices das seis faces são {1,2,6,7},{1,2,6,8},{1,2,5,8},{2,3,5,7},{3,4,6,7}, {3,4,5,8}. Qual o número do vértice que está mais longe do vértice de número 6?

8. Com 5 números ímpares entre -5 e 4 e com 5 números pares entre -5 e 4 são formados 5 pares de números. Se N é a soma dos produtos, obtidos em cada par de números, qual o valor mínimo possível de N?

9. No edifício mais alto do mundo moram Eduardo e Augusto. O número do andar do apartamento de Eduardo coincide com o número do apartamento de Augusto. A soma dos números dos

apartamentos dos dois é 2164. Calcule o número do apartamento de Eduardo sabendo que há 12 apartamentos por andar. (Por exemplo, no primeiro andar estão os apartamentos de 1 a 12, no segundo, de 13 a 24, e assim por diante).

10. Conta-se que os vizinhos de Kant arrumavam seus relógios baseando-se na hora que ele saia para passear, tão metódico era o filósofo. Manuel Camp é um ciclista que também gosta de estar no horário. Sabe-se que para ir de sua cidade à de sua mãe, viajando a 10 km por hora, chega-se às 18:00h. Porém, se o fizer a 15 km por hora, chega às 16:00h. Querendo chegar pontualmente às 17:00h, a que velocidade deve pedalar? Manuel é um adepto da economia de meios de transporte e de álgebra. Por isso, achou a resposta mentalmente. Como?

Nível 3 (Ensino Médio)

1. Sejam p e q inteiros positivos. Demonstre que $2p + 1 = q^2$ implica que $p = q = 3$.

2. Prove que para cada $n \in \mathrm{N}$, $n(n+1)(n+2)$ é um número divisível por 6.

3. Determine os três últimos digitos de 7^{9999}.

4. No sistema de numeração decimal, quantos números primos menores que 100 tem o 7 como dígito das unidades?

5. Uma bola estava flutuando em um lago quando a água congelou. Ao retirar a bola, sem romper o gelo, se formou um espaço vazio e redondo de 24 cm de diâmetro na superfície e 8 cm de profundidade. Qual é o raio, em cm, da bola?

6. Quantos inteiros positivos de quatro dígitos distintos, todos diferentes de 0, tem 12 como soma de seus algarismos?

7. Achar o menor número inteiro positivo cujo cubo termina com os dígitos 888.

8. Seja S uma progressão aritmética finita de números inteiros positivos com k termos, $k \geq 3$, cuja razão é ímpar. Demonstrar que

$$\sum_{i \in S} \frac{1}{i}$$

não é um número inteiro.

9. Em um triângulo $A\hat{B}C$ a mediana AM e a bissetriz BY do ângulo ABC se interceptam em um ponto P formando ângulos retos. Se $AY = 12$, qual a medida de YC?

10. Cinco países reclamam direitos sobre o mesmo território indefeso. Em uma conferência internacional, cada um dos países traça sobre o mapa do território a parte que pretende reclamar. Se cada país pretende reclamar mais da metade do território, demonstre que há dois países cujos reclames têm em comum menos que $\frac{1}{5}$ do território indefeso.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

Resolução Nível 1

1. É fácil verificar que a primeira coincidência das festas ocorreu em 1917. Daí em diante as coincidências ocorreram em intervalos múltiplos de 5 e de 7, logo em multiplos do $m.m.c(5,7) = 35$. Assim teremos celebrações dos dois clubes nos anos $1917 + 35 = 1952$, $1952 + 35 = 1987$, $1987 + 35 = 2022$, etc. Logo a resposta pedida é 1917, 1952 e 1987.

2. Como João ganhou exatamente três partidas, Maria perdeu três pontos, ficando com 2 pontos. Como no final Maria ficou com 10 pontos, ela ganhou mais mais 8 pontos, logo ganhou 4 partidas. Logo foram realizadas 3+4=7 partidas.

3. Se no primeiro negócio houve lucro de 10%, então o valor do lote de ações era 270 000 reais, pois se x é o valor do lote de ações então

$$x \times 1,1 = 297000 \Rightarrow x = 270000$$

   Portanto, o lucro foi de

$$297000 - 270000 = 27000$$

   No segundo negócio, como houve um prejuízo de 10%, o valor do lote naquele dia 330 000 reais Assim o prejuízo foi $330000 - 297000 = 33000$. Computando-se os dois negócios, houve um prejuízo de $33000 - 27000 = 6000$.

4. Branca de Neve tem 707 cogumelos para distribuir para sete anões. Como, relativamente ao quarto anão, o terceiro anão recebe menos um cogumelo e o quinto anão recebe mais um cogumelo, podemos dizer que, em média, o terceiro e o quinto recebem o mesmo que o quarto anão. Analogamente podemos concluir o mesmo para os segundo e sexto anões, bem como para os primeiro e sétimo anões. Ora 707:7=101 logo o quarto anão recebe 101 cogumelos, o quinto recebe 102, o sexto recebe 103 e o sétimo recebe 104.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

5. Repartimos as 12 bolinhas em 3 conjuntos A,B e C de 4 bolas cada. Comparamos A e B com a balança (1^a pesagem).

   1^a possibilidade: A e B tem o mesmo peso. Neste caso, a bola mais pesada está em C. Dividimos C em dois subconjuntos de 2 bolas, C_1 e C_2, e comparamos (2^a pesagem). Separamos o subconjunto mais pesado. Comparamos as duas bolas desse conjunto para ver qual pesa mais (3^a pesagem).

   2^a possibilidade: A e B têm pesos diferentes. Neste caso, o mais pesado contém a bolinha procurada, a qual pode ser localizada com o mesmo procedimento usado para C na 1^a possibilidade.

6. Os descendentes de dona Isolina são, os filhos: 4; os netos: 4×4; os bisnetos: $4 \times 4 \times 4$; os filhos dos bisnetos: $4 \times 4 \times 4 \times 4$. Então o total é $4 + 16 + 64 + 256 = 340$.

7. A fração da fita gravada no modo mais lento é $\frac{t}{360}$; restam $150 - t$ minutos da fita para gravar no modo mais rápido, correspodendo a $\frac{150-t}{120}$ da fita. Somando as frações e igualando a 1, temos $t = 45$ minutos.

8. Serão necessários quatro voltas. Lembre-se: a engrenagem grande fica parada, e a pequena gira em torno dela.

9. O pai nasceu no último dia de fevereiro de um ano divisível por quatro, faz aniversário em 28 de fevereiro e não em 29? Portanto, deve ter nascido em 1700,1800 ou 1900, anos definidos pelo calendário gregoriano como não bissextos (veja [3]) . Como é veterano da segunda guerra mundial, a única possibilidade é 1900. Assim, em 1940, tinha 40 anos e o filho, 20.

10. Não serão sessenta carneiros. Passaram-se 10 minutos entre o salto do primeiro e o do décimo, portanto o intervalo entre dois saltos consome $\frac{10}{9}$ de minuto. Como em 60 minutos há 54 vezes $\frac{10}{9}$, Plácido contará 54 carneiros.

Resolução Nível 2

1. Tu tinhas uma idade que chamaremos de x e hoje tem uma idade que chamaremos de y. Eu tenho o dobro da idade que tu tinhas

quando eu tinha a tua idade atual y(o dobro de x), ou seja eu tenho $2x$ anos. Então: tu tinhas x e agora tem y. Eu tinha y e agora tenho $2x$. Portanto temos que

$$y - x = 2x - y$$

$$2y = 3x$$

$$x = (\frac{2}{3})y$$

Então, substituindo o valor de x, temos: tu tinhas $(\frac{2}{3})y$ e agora tem y. Eu tinha y e agora tenho $(\frac{4}{3})y$. Agora preste atenção na segunda frase: Quando tu tiveres a minha idade, a soma de nossas idades será de 45 anos. Tu tem y, e para ter a minha idade, que é $(\frac{4}{3})y$, deve-se somar a tua idade y com mais $(\frac{1}{3})y$. Somando $y + (\frac{1}{3})y$ você terá a minha idade, ou seja, você terá $(\frac{4}{3})y$. Como somamos $(\frac{1}{3})y$ à sua idade devemos somar à minha também, ou seja: a soma de nossas idades deve ser igual a 45 anos:

$$(\frac{4}{3})y + (\frac{5}{3})y = 45$$

$$(\frac{9}{3})y = 45$$

$$3y = 45$$

$$y = 15$$

No início descobrimos que $x = (\frac{2}{3})y$, portanto $x = (\frac{2}{3}) \times 15$, logo $x = 10$. Portanto as idades são 20 e 15 anos.

2. Sendo N o número de garrafas e P o preço de cada garrafa, temos:

$$N \times P = 1000 \Rightarrow P = \frac{1000}{N}$$

Tira-se 4 garrafas e aumenta o preço da dúzia em 100,00. Logo temos:

$$(N-4) \times P + (\frac{N-4}{12}) \times 100 = 1000$$

Colocando $N - 4$ em evidência:

$$(N-4)(P + \frac{100}{12}) = 1000$$

$$(N-4)(\frac{1000}{N}+\frac{100}{12})=1000$$

$$\frac{1000N-4000}{N}+\frac{100N-400}{12}=1000$$

Resolvendo a equação chegamos a equação do segundo grau:

$$100N^2-400N-48000=0$$

Resolvendo a equação encontramos $N=24$.

3. Vamos dar nomes as pessoas: Gustavo sobe 2 degraus por vez e Marcos sobe 1 degrau por vez. Conforme diz o enunciado, quando Gustavo chegou ao topo ele contou 28 degraus. Como ele anda 2 por vez, na verdade o Gustavo deu 14 passos. Então quando ele chegou no topo, o Marcos havia andado 14 degraus, pois ele anda 1 por vez. Lembre-se que a escada está andando. Então ao mesmo tempo que Gustavo andou 28 e o Marcos andou 14, a escada havia andado sozinha x degraus. O enunciado diz que quando Marcos chegou ao topo ele contou 21 degraus. Como ele está no 14, ainda faltam 7 para ele chegar ao topo(ou seja, falta metade do que ele já andou). Portanto durante esses 7 que faltam, a escada andará sozinha mais $\frac{x}{2}$ degraus. O número de degraus vísiveis para o Gustavo e para o Marcos devem ser o mesmo. Então basta montar a equação:

$$28+x=(14+x)+(7+\frac{x}{2})$$

$$28+x=21+\frac{3x}{2}$$

$$28-21=\frac{3x}{2}-x$$

$$7=\frac{x}{2}$$

$$x=14$$

Se $x=14$, o número de degraus visíveis é $28+14=42$ degraus.

4. Seja $a10^2+b10+c$ o menor número de um par tricúbico ($a\neq 0$). Se $c<9$, e o outro número do par é $a10^2+b10+c+1$ daí temos:

$$a10^2+b10+c=a^3+b^3+c^3$$

$$a10^2 + b10 + c + 1 = a^3 + b^3 + (c+1)^3$$

onde

$$a^3 + b^3 + c^3 + 1 = a^3 + b^3 + (c+1)^3.$$

Então,

$$3c^2 + 3c = 0$$

e o único valor possível para o dígito c é 0. Então

$$a10^2 + b10 = a^3 + b^3$$

$$10(a10 + b) = a^3 + b^3(*)$$

e temos que $a^3 + b^3$ é múltiplo de 10 e que $b = 10 - a$ o único valor que satisfaz (*) é $a = 3$, temos então o par (370,371).

Se $c = 9, a^3 + b^3 + c^3 > 9^3 = 729$, de modo que $a \geq 7$, mas $7^3 + 9^3 = 1072$, portanto não há solução.

5. Seja H o pé da perpedicular traçada por P a OB e K o pé da perpendicular traçada por P a OA. Como o ângulo $O\hat{A}B = 45^o$ então o ângulo $O\hat{X}Y = 45^o$ pois $PQ \parallel AB$. O ângulo $Y\hat{P}H = 45^o$ e PY é hipotenusa do triângulo isósceles HPY então PY=PH$\sqrt{2}$. Analogamente PX = KP$\sqrt{2}$ = OH$\sqrt{2}$.

$$PX^2 + PY^2 = 2(PH^2 + OH^2) = 2OP^2 = 2.1 = 2$$

$$PX^2 + PY^2 = 2$$

.

6. Se nenhum destes meses for fevereiro, o número total de dias não pode ser menor que 91=7.13 e portanto o número de Domingos não poderia ser menor do que 13.

7. Dos três conjuntos {1,2,5,8},{2,3,5,7},{3,4,5,8} vê-se que o vértice de número 5 é adjacente a 2, 3 e 8. Os três vértices opostos a 5 sobre as faces que convergem neste vértice são 1, 7 e 4. Portanto o vértice diagonalmente oposto a 5 é 6.

8. O menor produto será obtido ao formarmos os pares utilizando-se os menores números ímpares com os maiores números pares, a saber
(-5,4),(-3,2),(-1,0),(1,-2) e (3,-4) então:
$N = (-20) + (-6) + 0 + (-2) + (-12) = -40$

9. Seja a o andar do apartamento de Eduardo. Então o número de seu apartamento é $12(a-1)+b$, com $1 \leq b \leq 12$. Daí

$$a + 12(a-1) + b = 2164$$

$$b = 2176 - 13a$$

$$1 \leq 2176 - 13a \leq 12$$

$$a = 167, b = 5$$

Portanto, o número do apartamento de Eduardo é:

$$12(a-1) + b = 12 \times 166 + 5 = 1997$$

10. A resposta 12,5 km/h é tentadora, mas é incorreta. Se Manuel viajasse até o destino a 15 km/h e daí prosseguisse pedalando por mais duas horas, é claro que andaria 30 km a mais do que se viajasse a 10 km/h, durante o mesmo período de tempo (que ainda não sabemos qual é). Ora, no caso ele percorre 5 km a mais por hora, do que no outro caso. Então para acumular essa diferença de 30km, seria necessário pedalar durante $\frac{30}{5} = 6$ horas. Porém sabemos que isso não é preciso: com duas horas menos, ele já teria chegado ao destino, à velocidade de 15 km/h. Ou seja, basta pedalar durante 4 horas. Assim descobrimos a distância do trajeto: $4 \times 15 = 60$km. Como ele quer chegar às 17h00 e não às 16h00, deverá fazer o mesmo trajeto (60 km) numa hora a mais, isto é, em 5 horas. Então, $\frac{60}{5} = 12$km/h, é a velocidade procurada.

Resolução Nível 3

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

1. Notemos que encontrando q se obtém imediatamente p e que a igualdade pode ser escrita como $2^p = (q-1)(q+1)$. Isto significa que $(q-1)$ divide 2^p. Aplicando o Teorema Fundamental da Aritmética (T.F.A.) se obtém que necessariamente $(q-1)$ é uma potência de 2. Em resumo, se tem que $(q-1) = 2^n$, com n menor ou igual a p. A igualdade pode ser escrita como

$$2^p = 2^n(2^n + 2) = 2^n.2.(2^{n-1} + 1) = 2^{n+1}.(2^{n-1} + 1).$$

   Desta igualdade se deduz que $(2^{n-1} + 1)$ deve ser uma potência de 2 (por T.F.A.), e isto acontece se e somente se $n = 1$. Portanto $q = 3$ e $p = 3$.

2. Temos que: $1 + 2 + ... + n = n(n+1)/2$, isto é, $n(n+1) = 2.(1 + 2 + ... + n)$. Portanto, $n(n+1)$ é divisível por 2. Por outra parte, se tem que um dos três números consecutivos $n, n+1$ ou $n+2$, devem ser divisíveis por 3. Disto se tem que o produto $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 6.

3. Observe que $7^4 = 2401$. Logo $7^{4n} = (2401)^n = (1 + 2400)^n$. Aplicando o binômio de Newton se obtém que $(1+2400)^n = 1 + n \times 2400 + \frac{n(n-1)}{2}(2400)^2 + ...$

   Desta última expressão é claro que depois do segundo termo todos os números terminam em ao menos 4 zeros. Logo os últimos três dígitos de 7^{4n} estão determinados pela expressão $1 + n \times 2400 = 24 \times n \times 100 + 1$.

   Seja m o último dígito de $24 \times n$. Então $1 + 2400 \times n$ terminará em $m01$. Tomemos um n adequado, para formar 9999. Claramente 9999=9996+3, logo $7^{9999} = 7^{9996} \times 7^3$

   Notemos que 9996=4×2499. Portanto analizando anteriormente se deduz que $7^{9996} = 7^{4\times 2499}$ termina em 601. Como 7^3 termina em 343, se obtém que o número em questão deve terminar em 143.

4. 7,17,37,47,67 e 97 são primos; por exemplo, para 97 é suficiente verificar que não é divisível por 2,4,5 e 7, que são os únicos primos menores que a raíz quadrada de 97. Por outro lado, 27,57 = 3×19, 77 e 87 = 3×29 não são primos.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

5. A figura abaixo mostra uma seção transversal da bola antes de retirá-la do lago, como o ângulo OCA é reto, $(r-8)^2+12^2=r^2$. Resolvendo a equação temos $r=13$.

6. Podemos decompor 12 como soma de quatro inteiros distintos entre si e todos diferentes de 0, da seguinte forma: $12 = 1+2+3+6 = 1+2+4+5$. Cada uma destas decomposições gera $4! = 1\times 2\times 3\times 4 = 24$ números inteiros diferentes cada um com quatro dígitos. Portanto, o número de inteiros que cumprem a propriedade são 48.

7. Se o cubo de um número inteiro termina em 8, então o inteiro deve terminar em 2, isto é, deve ser da forma 10k + 2. Então $n^3=(10k+2)^3=1000k^3+600k^2+120k+8$, onde o penúltimo termo, 120k, determina o penúltimo dígito de n^3, que deve também ser 8. Em vista disto, 12k deve também terminar em 8, isto é, k deve terminar em 4 ou 9, então deve ser da forma $5m+4$. Logo $n^3 = (10(5m+4)+2)^3 = 125000m^3+315000m^2+264600m+74088$. Posto que os primeiros dos termos da direita terminam em 000, enquanto que a soma dos últimos termina em 88, segue que, $264600m$ deve terminar em 800. O menor m que satisfaz é $m=3$, o que implica que $k=5\times 3+4=19$ e $n=10\times 19+2=192$.

8. É claro que os termos consecutivos de S são de diferentes paridades. Pegamos os termos ímpares e dividimos os termos restantes por 2. Isto nos dá uma nova sucessão de números inteiros positivos com a mesma razão ímpar. Repetimos o mesmo processo anterior até que sobre apenas um número. Claramente este número se deriva de um único termo em S divisível por uma potência máxima de 2.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

Em consequência, quando obtemos o mínimo denominador comun da soma

$$\sum_{i\in S}\frac{1}{i}$$

2 será o fator do denominador mas não do numerador. Logo, a soma não é inteira.

9. Os triânglos BPA e BPM são congruentes porque os ângulos ABP e MBP são iguais (BY bissetriz), tem BP como lado comum e os ângulos APB e MPB são retos. Segue que $AB = BM = \frac{1}{2}BC$. Agora tem se que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados do ângulo. Segue que,
$$\frac{AY}{YC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}.$$
Finalmente obtemos $YC = 2(AY) = 24$.

10. Se x_k é a área da parte do território que é reclamada por exatamente k países. Então, a área do território é:

$$A_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1.$$

A soma das áreas dos territórios reclamados é:

$$A_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \geq \frac{5}{2},$$

onde é claro que a interseção de n reclamantes está contada n vezes. Portanto, a soma das dez inteseções do reclamantes tomada dois a dois é:
$$A_2 = x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5,$$
onde os coeficientes 3,6 e 10 representam $\binom{3}{2}$, $\binom{4}{2}e\binom{5}{2}$. Agora temos,

$$A_2{-}2A_1 = -2x_1{-}3x_2{-}3x_3{-}2x_4 \geq -3x_0{-}3x_1{-}3x_2{-}3x_3{-}3x_4{-}3x_5$$

$= -3$, onde
$$A_2 \geq 2A_1 - 3 \geq 2.\frac{5}{2} - 3 = 2,$$
segue que ao menos uma das dez possíveis interseções tomadas duas a duas tem uma área menor que $\frac{1}{5}$. Este é um exemplo do uso

da fórmula de inclusão e exclusão. Se A_1 é a soma das áreas de algumas figuras e A_k é a soma das áreas das interseção de k delas $(k = 2, 3, 4, 5)$, então a área da união é igual a $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$

Bibliografia

[1] Matemáticas y Olimpíadas, Sociedad de Matemática de Chile, 1994, Chile.
[2] Crux Mathemtaticorum, Canadian Mathematical Society, 1997 - 1999, Canadá.
[3] Revista do Professor de Matemática, *"Em que dia da semana foi proclamada a idenpendência do Brasil?"*, pg.50, nº 15, 2º número de 1989, São Paulo.
[4] Revista Super Interessante, nº 5 e 10, ano 9, nº 1, 2 e 3, ano 10, Editora Abril.

João Leonardo M. F. Rabêlo
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Goiânia, GO, Brasil
jonhmat@bol.com.br

Classificados na IX Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás/2000

Classificados Nível 3

Ord	Nome	Lugar	Escola	Série	Cidade
1	Carlos Stein Naves de Brito	1°	Col. Visão	2°	Goiânia
2	Fernando Prado Rocha	2°	Col. Mega	3°	Goiânia
3	Márcio Antonio F. Belo Filho	3°	I.P.E.	1°	Goiânia

Menções Honrosas

Ord	Nome	Lugar	Escola	Série	Cidade
4	Heiji Inuzuka	4°	Col. Dinâmico	3°	Goiânia
5	Paulo Regis T. D. Junior	5°	Col. Mega	3°	Goiânia
6	Luiz R. de Azevedo Frota	6°	Col. Visão	2°	Goiânia
7	Tibério B. O. Martins	6°	Col. Mega	3°	Goiânia
8	Laura Fernandes Carrijo	7°	Col. Dinâmico	3°	Goiânia
9	Ricardo Araújo Mendes	7°	Col. Objetivo	3°	Anápolis
10	Hugo de O. L. Barbosa	8°	Col. Dinâmico	3°	Goiânia
11	Márcio Henrique Ferreira	8°	Col. Visão	3°	Goiânia
12	Saymonn F. de Souza Santos	9°	Col. Portinari	3°	Goiânia
13	Thiago Antonio de Moraes	10°	Col. Mega	3°	Goiânia
14	Leonardo T. Brito Xavier	11°	Col. Mega	2°	Goiânia
15	Fabio Rauber	12°	Col. Visão	2°	Goiânia
16	Climbiê Ferreira Hall	13°	CEFET	1°	Goiânia
17	Guilherme Ayres da S. Lucas	13°	Col. Dinâmico	3°	Goiânia
18	Bruno Borges de Souza Lima	14°	Col. Mega	3°	Goiânia
19	Carlos Henrique Reis E. Roni	14°	Col. Pré Medico	3°	Goiânia
20	Rodrigo César A. de Oliveira	14°	I.P.E.	3°	Goiânia

Classificados Nível 2

Ord	Nome	Lugar	Escola	Série	Cidade
1	Jorge P. de Morais Neto	1°	Col. Mega	8°	Goiânia
2	Vitor Ken Mochizuki	1°	Col. Mega	8°	Goiânia
3	Guilherme R. Salerno	2°	I.P.E.	7°	Goiânia
4	Tiago Kratka de Sousa	3°	Col. Agostiniano	8°	Goiânia

Menções Honrosas

Ord	Nome	Lugar	Escola	Série	Cidade
5	Leonardo S. R. B. da Silva	4°	Col. Agostiniano	8°	Goiânia
6	Ernesto Q. Mendonça	5°	Col. Disciplina	7°	Goiânia
7	Karina N. da Silva	6°	I.P.E.	8°	Goiânia
8	Rodrigo S. Fernandes	6°	Col. Anglo	7°	Catalão
9	Wu Yueh-Feng	6°	I. N. S. do Carmo	8°	Anápolis
10	Fernando F. Antunes	7°	I. N. S. do Carmo	8°	Anápolis
11	Karine T. Bittencourt	7°	Col. S. Agostinho	8°	Goiânia
12	Raphael de F. Carmo	7°	Colégio Lassale	7°	Goiânia
13	Cecília de F. Morais	8°	Col. Dimensão	8°	Goiânia
14	Diogo N. F. de Jesus	8°	Col. Anglo-Campinas	8°	Goiânia
15	Leandro S. Ribeiro	8°	I.P.E.	7°	Goiânia
16	Lucila S. da S. Rocha	8°	Col. Objetivo	8°	Catalão
17	Gabriel L. Côdo	9°	Esc. E. F. Crescer	7°	Anápolis
18	Ana Idalina de P. Silva	10°	I.P.E.	8°	Goiânia
19	Leonardo Alamy Martins	10°	Col. Porto Seguro	8°	Goiânia
20	Ailton José de S. Júnior	11°	I. F. de Assis	8°	Itumbiara
21	Elaine Cristine B. Matos	11°	Col. Santo Agostinho	8°	Goiânia
22	Juliane Feitosa Bezerra	11°	Col. Progressivo	8°	Goiânia
23	Luis H. R. M. de Lima	11°	C. E. J. N. de Campos	8°	Catalão
24	Max Well Rabelo	11°	Col. Porto Seguro	7°	Goiânia
25	Pedro Menezes Santana	11°	C. E. Nova Opção	8°	Goiânia
26	Ricardo César de Q. Filho	11°	Col. Marista	8°	Goiânia
27	Cibele Ferreira de Souza	12°	Ed. N. do Araguaia	8°	Mineiros
28	Hugo Cabral Tannus	12°	I. E. Emmanuel	7°	Aparecida
29	Leonardo R. Souza	12°	Col. Couto Magalhães	8°	Anápolis
30	Elisa Manfrim de Araújo	13°	Col. Agostiniano	8°	Goiânia
31	Ricardo Agapito Nicoletti	13°	P. S. B. De Siena	8°	Catalão
32	Roberta V. Gonçalves	13°	Col. Disciplina	8°	Goiânia
33	Gustavo Souza Araújo	14°	Col. Anhanguera	8°	Goiânia
34	Pedro Ivan Ofugi	14°	Esc.Antares	8°	Goiânia
35	Vinicius Rodovalho	14°	Col. Galileu	7°	Anápolis
36	Carla Cristina P. Carneiro	15°	Col. Disciplina	7°	Goiânia
37	Daniel Costa Garcia	15°	I.P.E.	8°	Goiânia
38	Danilo B. do Nascimento	15°	Colégio Santa Clara	8°	Goiânia
39	Douglas Bernardes Silva	15°	Col. A. Dom Bosco	8°	Goiânia
40	Juliana Camila L. Cavaian	15°	Col. Polícia Militar	8°	Goiânia
41	Rafael Andrade de Oliveira	15°	Col. Solar	7°	Ceres

Classificados Nível 1

Ord	Nome	Lugar	Escola	Série	Cidade
1	Mateus Quaresma Mendonça	1ª	Col. Disciplina	6º	Goiânia
2	João Antônio Marques Araújo	2ª	Col. Aphonsiano	6º	Trindade
3	Luciana M. R. Salgado	3ª	Col. Marista	6º	Goiânia

Menções Honrosas

Ord	Nome	Lugar	Escola	Série	Cidade
4	Ricardo de Rezende Souza	4ª	I.P.E.	6º	Goiânia
5	Janaína C. Q. Almeida	5ª	Col. Objetivo	6º	Goiânia
6	Henrique Eij Mitado	6ª	Col. Anhanguera	6º	Goiânia
7	Lira Rocha da Mota	6ª	Educ. Yara Berocan	6º	Goiânia
8	Raiza Balbino	6ª	Col. Anglo-Campinas	6º	Goiânia
9	Vicente de Souza Cardoso Jr.	6ª	Col. Objetivo	6º	Goiânia
10	Vinícius Borges	6ª	Col. Agostiniano	6º	Goiânia
11	Leonardo Augusto de Oliveira	7ª	Col. Agostiniano	6º	Goiânia
12	Bernardo G. T. Ayres	8ª	Núcleo Educativo	6º	Catalão
13	Daniel Richter Reiner	8ª	Col. A. Dom Bosco	5º	Goiânia
14	João Ricardo B. Rios	8ª	Col. Maria Betânia	5º	Goiânia
15	Luiz Yoshio Tatsumi Júnior	8ª	Núcleo Educativo	6º	Catalão
16	Vitor Maia	8ª	Ens. Fund. Crescer	6º	Anápolis
17	Eric Emiliano Amaral Fonseca	9ª	Col. Disciplina	6º	Goiânia
18	Georges Hanna El Hansi	10ª	Ens. Fund. Crescer	6º	Anápolis
19	João Paulo V. Florentino	11ª	Col. Marista	6º	Goiânia
20	Gabriel C. M. de Souza	12ª	Educ. N. do Araguaia	6º	Mineiros
21	Gustavo Osório Rizzi Lippi	12ª	Col. A. Dom Bosco	6º	Goiânia
22	Vantuir Santos Junior	12ª	Col. Expansão	5º	Quirinóp.
23	Rayane Jacobson	13ª	Col. Marista	6º	Goiânia
24	Alexei Lenine D. Menezes	14ª	Inst. Emmanuel	6º	Goiânia
25	Renato Moreira Magalhães	14ª	Col. Lassale	6º	Goiânia
26	Uiara Rios Pereira	14ª	Col. Pré-Médico	6º	Goiânia
27	Breno Antonelli P. de Oliveira	15ª	Col. Aphonsiano	5º	Trindade
28	Bruno C. F. Cantarelli	15ª	Ens. Fund. Crescer	6º	Anápolis
29	Gusavo Medeiros da Silveira	15ª	Col. A. Dom Bosco	6º	Goiânia
30	Helio K. Kanda Júnior	15ª	Col. Álvaro de Melo	6º	Ceres
31	Henrique Teixeira Santos	15ª	Col. Progressivo	6º	Goiânia
32	Mozer de O. Santos	15ª	Inst. Emmanuel	6º	Goiânia
33	Nayara Fayad Souza Dib	15ª	Centro Ed. P. Freire	6º	Catalão
34	Rodolfo S. C. Maçaranduba	15ª	I.P.E.	6º	Goiânia
35	Ana Carolina A. Câmara	16ª	Col. Disciplina	6º	Goiânia
36	Fernando França de Souza	16ª	Col. Est. J. Machado	6º	Goianésia
37	Tárik Hermano Cunha	16ª	Col. Mega	6º	Goiânia
38	Tiago Sardinha J. de Almeida	16ª	Col. Disciplina	6º	Goiânia

Resolução Comentada das Provas da IX Olímpiada de Matemática do Estado de Goiás

Gisele de Araújo Prateado Gusmão, Luciana Maria Dias de Ávila,
Rogerio Queiroz Chaves

Questões do Nível 1 (Ensino Fundamental 5ª e 6ª séries)

1. Os números inteiros de 1 a 20 devem ser listados de tal maneira que a soma de cada número com qualquer um de seus vizinhos seja um número primo. Complete a lista com os números que faltam.

   $$20, \_\_\_, 16, 15, 4, \_\_\_, 12, \_\_\_, 10, 7, 6, \_\_\_, 2, \_\_\_, 14, 9, \_\_\_, 5, 18, \_\_\_.$$

   Resolução
   Há duas soluções possiveis:

   20, $\underline{3}$, 16, 15, 4, $\underline{19}$, 12, $\underline{1}$, 10, 7, 6, $\underline{11}$, 2, $\underline{17}$, 14, 9, $\underline{8}$, 5, 18, $\underline{13}$

   ou

   20, $\underline{3}$, 16, 15, 4, $\underline{1}$, 12, $\underline{19}$, 10, 7, 6, $\underline{11}$, 2, $\underline{17}$, 14, 9, $\underline{8}$, 5, 18, $\underline{13}$

2. Um retângulo de cartolina de 4x6cm foi dividido em quatro triângulos idênticos conforme a figura 1(a). Posicionando os quatro triângulos sobre uma mesa, primeiro foramamos um quadrado como o da figura 1(b), que contém um quadrado menor no seu interior. Rearranjando os triângulos, sem sobreposição, formamos outro quadrado como na figura 1(c), que também possui um quadrado menor em seu interior. Calcule as áreas dos quatro quadrados

que aparecem nas figuras 1(b) e 1(c).

Resolução
Da maneira como foi dividido o retângulo inicial, obtemos quatro triângulos com cateto menor de $3cm$ e cateto maior de $4cm$. Assim, na figura 1(b) o lado do quadrado maior é $3+4 = 7cm$ e, portanto, sua área é $7^2 = 49cm^2$. Para obter a área do quadrado menor da figura 1(b), basta subtrair do quadrado maior a área dos quatro triângulos, que corresponde à area do retângulo inicial. Assim obtemos $49 - 24 = 25cm^2$. O quadrado formado na figura 1(c) possui o mesmo lado que o quadrado menor da figura 1(b), a hipotenusa dos triângulos. Por isso sua área também é de $25cm^2$. Por último, podemos obter a área do quadrado menor de todos subtraindo novamente a área dos quatro triângulos: $25 - 24 = 1cm^2$. Também é fácil observar que o lado desse quadrado menor é a diferença dos catetos dos triângulos, ou seja, $4 - 3 = 1cm$.

3. Numa bicicleta com marchas cada marcha é obtida combinando uma coroa (aquela roda dentada que fica junto aos pedais) e uma catraca (a roda dentada que fica presa à roda traseira). O esforço que o ciclista precisa fazer ao pedalar pode ser alterado trocando-se as marchas. Por exemplo, quanto maior a coroa escolhida, maior será o esforço necessário para pedalar a bicicleta. Quanto maior for a catraca, menor o esforço. Assim, o esforço é diretamente proporcional ao tamanho da coroa e inversamente proporcional ao tamanho da catraca. Os tamanhos das coroas e das catracas estão relacionados com o número de dentes que cada uma possui.

Resumindo, o esforço que o ciclista tem que fazer é proporcional ao número fracionário $\frac{p}{q}$, onde p é o número de dentes da coroa escolhida e q é o número de dentes da catraca escolhida. Uma certa bicicleta de 10 marchas possui coroas com 30 e 34 dentes e catracas com 14, 17, 20, 23, e 26 dentes. Representando cada marcha por uma fração $\frac{p}{q}$, onde p é o número de dentes da coroa escolhida e q é o número de dentes da catraca escolhida ordene as 10 marchas pela ordem crescente do esforço que o ciclista precisa fazer ao utilizá-las.

Resolução
As frações que representam as marchas da bicicleta são:
$\frac{30}{14}, \frac{30}{17}, \frac{30}{20}, \frac{30}{23}, \frac{30}{26}, \frac{34}{14}, \frac{34}{17}, \frac{34}{20}, \frac{34}{23}, \frac{34}{26}$.

Colocando em ordem crescente as frações com o numerador igual a 30 temos: $\frac{30}{26} < \frac{30}{23} < \frac{30}{20} < \frac{30}{17} < \frac{30}{14}$.
Agora vamos comparar as frações com o numerador igual a 34 com estas frações: temos que $\frac{30}{26} < \frac{34}{26}$, mas qual a relação da fração $\frac{34}{26}$ com a fração $\frac{30}{23}$?
Como o mmc de 23 e 26 é 598, temos $\frac{30}{23} = \frac{780}{598} < \frac{782}{598} = \frac{34}{26} < \frac{34}{23}$.

Para as frações $\frac{34}{23}$ e $\frac{30}{20}$, vale $\frac{34}{23} = \frac{680}{460} < \frac{690}{460} = \frac{30}{20} < \frac{34}{20}$.

Assim já temos: $\frac{30}{26} < \frac{30}{23} < \frac{34}{26} < \frac{34}{23} < \frac{30}{20} < \frac{34}{20}$.

Com mais duas comparações obtemos a ordenação pedida:

$\frac{30}{26} < \frac{30}{23} < \frac{34}{26} < \frac{34}{23} < \frac{30}{20} < \frac{34}{20} < \frac{30}{17} < \frac{34}{17} < \frac{30}{14} < \frac{34}{14}$.

É bom observar que existe uma maneira mais fácil de se obter essa ordenação. Basta ordenar os inversos dessas frações em ordem decrescente (porque?). Experimente!

4. Quantos números de 4 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3 e 4? Qual é a soma de todos estes números?

Resolução
Podemos formar 24 números. Em ordem crescente (por coluna) eles são:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Ao somarmos todos estes números estamos somando na casa das unidades 6 vezes o número 1, 6 vezes o 2, 6 vezes o 3, 6 vezes o 4. O mesmo ocorre quando somamos a casa das dezenas, das centenas e do milhar. Logo a soma total é:

$$6.(1+2+3+4)+6.10(1+2+3+4)+6.100(1+2+3+4)+6.1000(1+2+3+4)$$
$$= 60 + 600 + 6000 + 60000 = 66660.$$

5. Imagine que você está olhando para um cubo sobre uma mesa, com uma das faces voltada para você. O cubo tem uma face preta e cinco faces brancas. Vamos considerar dois tipos de rotações do cubo:

   R_1 = girar o cubo de 90° em torno de um eixo horizontal, de maneira que a face que está voltada para cima venha para a frente (Ex.: da figura 2(a) para a figura 2(b)).

   R_2 = girar cubo 90° em torno do eixo vertical no sentido anti-horário, de maneira que a face que está na frente vá para a direita (Ex.: da figura 2(b) para a figura 2(c)).

   A figura 2 mostra a posição inicial do cubo (a) e o resultado das três primeiras rotações da seqüência de rotações alternadas do cubo $R_1, R_2, R_1, R_2, R_1, R_2, ...$

Iniciando na posição da figura 2(a) e realizando rotações conforme a seqüência acima, determine a posição da face preta do cubo após

a) 6 rotações;
b) 12 rotações;
c) 2000 rotações;

Resolução
a) Após 6 rotações de seqüência pedida, a posição do cubo é idêntica à inicial (para todas as faces), mas é mais fácil ver isso apenas para a face preta. Ou seja, depois de 6 rotações o cubo volta para a posição inicial.

b) Continuando mais 6 rotações depois das 6 do item a, a face preta do cubo volta a ficar por cima como na posição inicial. Na verdade a cada ciclo de 6 rotações o cubo volta à posição inicial.

c) Para 2000 rotações temos que nos múltiplos de 6 o cubo está na posição inicial, e como $2000 = 333 \times 6 + 2$, fazemos duas rotações a partir da posição inicial. Logo a posição final é dada pela figura 2(c) (face preta do lado direito) de quem olha para o cubo.

6. João tem três bolas: A, B, C. Pintou uma bola de vermelho, uma de azul e a outra de branco, não necessariamente nesta ordem. Entre as afirmativas abaixo apenas uma é verdadeira:

   ▷ A é vermelha.
   ▷ B não é vermelha.
   ▷ C não é azul.

   Descubra, com base nas afirmações acima, qual a cor de cada bola.

   Resolução
   Suponha que a afirmativa "A é vermelha" é verdadeira. Logo as afirmativas "B não é vermelha" e "C não é azul" são falsas. Daí temos "B é vermelha" e "A é vermelha" o que não ocorre. Suponha agora que afirmativa "B não é vermelha" seja verdadeira. Consequentemente as afirmativas "A é vermelha" e "C não é azul" são falsas. Isto é, A não é vermelha e C é azul. Logo chegamos A não é vermelha, B não é vermelha e C é azul, o que também não pode ocorrer. Finalmente suponha que a afirmativa "C não é azul" é verdadeira; daí C pode ser branca ou vermelha. Agora como as

afirmativas “A é vermelha” e “B não é vermelha” são falsas temos que A não é vermelha; logo é azul ou branca, e B é vermelha. Como B é vermelha, C deve ser branca e A deve ser azul.

Questões do Nível 2 (Ensino Fundamental 7º e 8º séries)

1. Suponha que existe um elemento i tal que $i^2 = -1$. Neste caso $i^1 = 1$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$.

   a)Calcule i^{999};
   b)Calcule a soma $i^1 + i^2 + i^3 + ... + i^{1999} + i^{2000}$.

   Resolução
   Observe que

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1 & & & \\ i^1 = i & i^2 = -1 & i^3 = -i & i^4 = 1 \\ i^5 = i & i^6 = -1 & i^7 = -i & i^8 = 1 \\ i^9 = i & i^{10} = -1 & i^{11} = -i & \text{etc.} \end{array}$$

   Assim

$$i^{4n+r} = (i^4)^n i^r = i^r$$

   a) Como $999 = 4 \times 249 + 3$ temos que $i^{999} = i^{4\times 249+3} = (i^4)^{249}(i)^3$ $= -i$
   b) De maneira análoga observamos que a soma de cada 4 potências consecutivas de i é nula e como 2000 é múltiplo de 4 temos

   $(i^1 + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + ... + (i^{1997} + i^1 998 + i^{1999} + i^{2000})$ $= 0$.

2. Considere o triângulo ABC e suas alturas BD e AE como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que $H\hat{D}E = H\hat{E}D$, mostre que ABC

é isósceles.

Resolução
Por hipótese os ângulos $H\hat{D}E = H\hat{E}D$, logo o triângulo HDE é isósceles com $HD = HE$. Pelo caso ALA os triângulos AHD e BHE são congruentes, logo $BD = AE$. Pelo caso ALA os triângulo AEC e BDC são congruentes, e assim $AC = BC$, portanto o triângulo ABC é isósceles.

3. Um retângulo de cartolina foi dividido em quatro triângulos idênticos conforme a figura (a). Posicionando os 4 triângulos sobre uma mesa, primeiro formando um quadrado como o da figura (b), que contém um quadrado menor no seu interior. Rearranjando os triângulos, sem sobreposição, formamos outro quadrado coma na figura(c), que também possui um quadrado menor em seu interior. Sabendo que, dos 4 quadrados representados nas figuras (b) e (c), o maior tem $49cm^2$ de área e o menor tem $1cm^2$, determine os lados do retângulo inicial.

Resolução

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

Da maneira como foi dividido o retângulo inicial, obtemos quatro triângulos retângulos congruentes entre si. Seja a o cateto maior e b o cateto menor desses trângulos. O lado do maior quadrado é $a + b$. logo $(a + b)^2 = 49$. Da mesma forma a área do quadrado menor é $(a - b)^2 = 1$. Dessa forma obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} a + b &= 7 \\ a - b &= 1 \end{aligned}$$

Daí obtemos a solução $a = 4cm$ e $b = 3cm$. Portanto os lados do retângulo inicial são $a = 4cm$ e $2b = 6cm$. Observe que a figura (a) da prova passa a impressão de que o cateto correspondente ao lado do retângulo que foi dividido ao meio é menor que a base do retângulo. Se desprezarmos esse fato, podemos obter outra resposta válida: os lados do retângulo podem ser $2a = 8cm$ e $b = 3cm$.

4. O dobro da quantidade de dinheiro que está com Ari mais o quádruplo da quantidade que está com Bia somam 133 reais . Caio pediu a eles que emprestassem uma moeda para ele traçar um círculo, mas Ari e Bia negaram ter alguma moeda. Prove que eles estão mentindo.

   Resolução
   Se Ari e Bia não possuíssem moedas, eles deveriam ter quantias inteiras de dinheiro. Mas o dobro de um número inteiro, somado ao quádruplo de outro inteiro resultaria em um número par, o que não é o caso de 133. Em outras palavras, se $2a + 4b = 133$ então $a + 2b = 66,5$. Assim as quantias de dinheiro com Ari (a) e Bia (b) não podem ser ambas inteiras e então eles têm alguma moeda.

5. a) Com os algarismos $0, 1, 2, ..., 8, 9$ podemos formar pares de números, como por exemplo (0,0), (1,3),(9,5) e (5,9).
   Quantos destes pares podemos formar?
   b) Considere o número 0,112358314... onde cada algarismo, a partir do terceiro, é obtido da soma dos dois algarismos anteriores a

ele, levando em conta apenas o algarismo das unidades e desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional?

Resolução
a) Para o primeiro elemento do par podemos escolher entre 10 algarismos e para o segundo também podemos escolher entre 10 algarismos, logo podemos formar 100 pares. Isso também pode ser percebido se escrevermos os pares na seqüência:
$(0,0); (0,1); (0,2); ...; (9,8); (9,9)$.
Essa seqüência pode ser identificada com a dos números inteiros de 0 a 99.
b) Veja a resolução da *questão 05* do *nível 3*, página 41.

6. João tem três bolas: A, B e C. Pintou uma bola de vermelho, uma de azul e a outra de branco não necessariamente nesta ordem. Entre as afirmativas abaixo apenas uma é verdadeira:

   ▷ A é vermelha.
   ▷ B não é vermelha.
   ▷ C não é azul.

   Descubra , com base nas afirmações acima, qual a cor de cada bola.

   Resolução
   Veja *questão 6* do *nível 1.* página 31.

Questões do Nível 3 (Ensino Médio)

1. Existem registros de Torneios Matemáticos no século XIII na Europa, patrocinados por imperadores que gostavam de matemática. Uma versão atual de um dos problemas destes torneios é a que aparece a seguir, determine uma das soluções deste problema:

   " Num monte de moedas, todas de R$ 1,00 existem moedas de três homens, sendo que $\frac{1}{2}$ do total de moedas é do primeiro homem, $\frac{1}{3}$ do total de moedas é do segundo homem e $\frac{1}{6}$ do total de moedas é do terceiro homem. Cada homem retira do monte algumas moedas até que nada reste. O primeiro homem põe de volta $\frac{1}{2}$ do que retirou, o segundo homem põe de volta $\frac{1}{3}$ do que retirou e o terceiro homem $\frac{1}{6}$ do que retirou. Quando se divide igualmente, entre os três, o total de moedas postas de volta, verifica-se que cada homem fica exatamente com a quantia de moedas que lhe pertence. Quantas moedas haviam no monte original e quantas cada homem retirou do monte? "

   (Howard Eves, Introdução à História da Matemática, Ed. da Unicamp, 1997).

   Resolução
   Sejam a o número de noedas retiradas do monte pelo primeiro homem;
   b o número de moedas retiradas do monte pelo segundo homem;
   c o número de moedas retiradas do monte pelo terceiro homem.
   Visto que após as retiradas não sobram moedas, o total de moedas é

   $$n = a + b + c.$$

   O primeiro homem coloca no monte $\frac{1}{2}a$ e fica com $\frac{1}{2}a$
   O segundo homem coloca no monte $\frac{1}{3}b$ e fica com $\frac{2}{3}b$;
   O terceiro homem coloca no monte $\frac{1}{6}c$ e fica com $\frac{5}{6}c$; Depois de dividir em partes iguais o total de moedas colocadas no monte cada homem fica exatamente com a quantia de moedas que lhe pertence, isto é, para o primeiro homem

   $$\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{3}b + \tfrac{1}{6}c) = \tfrac{1}{2}(a + b + c);$$

para o segundo homem

$$\frac{2}{3}b + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c) = \frac{1}{3}(a + b + c);$$

para o terceiro homem

$$\frac{5}{6}c + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c) = \frac{1}{6}(a + b + c);$$

Resolvendo o sistema encontramos

$$b = 13c \text{ e } a = 33c.$$

O número c deve ser múltiplo de 6, logo uma possível solução é $a = 33 \times 6 = 198$, $b = 13 \times 6 = 198$ e $c = 6$.
Assim, no monte original haviam 282 moedas.

2. Pense num número natural de três algarismos, subtraia dele a soma de seus algarismos. Observe que você obteve um número múltiplo de 9. a)Prove que este resultado é verdadeiro para todo número natural de três algarismos.
b)Este resultado continua válido para um número natural qualquer?

Resolução
a) Seja abc um número natural de três algarismos. Observe que

$$abc = a10^2 + b10 + c.$$

Assim

$$abc - (a + b + c) = a(10^2 - 1) + b(10 - 1) = a99 + b9 = 9(11a + b),$$

que é multiplo de 9.

b)Queremos mostrar que o resultado vale para um número natural qualquer. Seja $a_1a_2...a_{n-1}a_n$ um número natural com n algarismos. Observe que

$$a_1a_2...a_{n-1}a_n = a_110^n + a_210^{n-2} + ... + a_{n-1}10^1$$

Logo

$$a_1a_2...a_{n-1}a_n - (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n) = a_1(10^{n-1} - 1) + a_2(10^{n-2} - 1) + ... + a_{n-1}(10 - 1) + a_{n-1}(10 - 1) + a_n(1 - 1)$$

$$= 99...999a_1 + 99...99a_2 + ... + 99a_{n-2} + 9a_{n-1}$$
$$= 9(11...111a_1 + 11...11a_2 + ... + 11a_{n-2} + a_{n-1})$$

que é múltiplo de 9.

3. Considere um recipiente com a forma de um cubo, sem tampa, apoiado sobre sua base em uma mesa horizontal e contendo apenas água em seu interior. Seja α o maior ângulo que podemos girar o cubo, em torno de uma das arestas da base, sem que a água derrame.

   a)Se a água enche $\frac{2}{3}$ do cubo, calcule a tangente de α.
   b)Que fração de capacidade máxima do cubo deveríamos encher de água para que α fosse 30^0
   c)Responda a pergunta do ítem b para que α fosse de 60^0.

   Resolução
   Se a água ocupa mais que a metade do volume do cubo, o ângulo α é menor que 45°, como mostra a figura (b) abaixo. Se a água ocupa menos que a metade do volume do cubo, temos a situação

descrita na figura (c), com $\alpha > 45°$.

a)A água ocupa $\frac{2}{3}$ do volume do cubo. Nesse caso a tangente de α é simplesmente a razão entre a medida x da figura (b) e a aresta do cubo. Supondo que a aresta do cubo seja a, o volume do prisma triangular formado pela parte do cubo não ocupada pela água é $a^2\frac{x}{2}$ que deve corresponder a um terço do volume do cubo, isto é, $\frac{a^3}{3}$. Assim obtemos $x = \frac{2a}{3}$ e portanto $tg\alpha = \frac{x}{a} = \frac{2}{3}$.

b) Para termos $\alpha = 30°$, devemos ter $tg\alpha = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, isto é, $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Com isso o volume do prisma triangular não preenchido pela água é $\frac{a^2x}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Logo, o volume ocupado pela água é $a^3 - \frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3(6-\sqrt{3})}{6}$ que corresponde a $\frac{6-\sqrt{3}}{6}$ do volume do cubo.

c)Para $\alpha = 60°$, a água deve encher menos que a metade do cubo , e por isso utilizamos a figura (c). Na eminência de derramamento a parte ocupada pela água forma um prisma triangular. Se y é o cateto menor da base desse prisma e a é o outro cateto (a aresta do cubo), temos $tg\alpha = \frac{a}{y} = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Pelo calculado no ítem (b), o volume desse prisma é $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$, ou seja, a água ocupa $\frac{\sqrt{3}}{6}$ do cubo.

4. Mostre que se n é um número natural, então $n^3 - 3n^2 + 2n$ é divisível por 6.

   Resolução
   $n^3 - n^2 + 2n = n(n^2 - 3n + 2) = n(n-1)(n-2)$ é o produto de três números naturais consecutivos. Para $n = 0$, 1 ou 2, esse produto vale zero. Para $n \geq 3$, pelo menos um desses três fatores é par e exatamente um deles é múltiplo de 3. Portanto o produto é divisível por 6.

5. Considere o número 0,112358314... onde cada algarismo, a partir do terceiro, é obtido da soma dos dois algarismos anteriores a ele, levando em conta apenas o algarismo das unidades e desprezando o das dezenas. Esse número é racional ou irracional?

   Resolução
   Observe que no número $x = 0,112358314...$, cada par ordenado de algarismos vizinhos (a,b) gera o próximo algarismo do número. Logo se algum par de números, que já apareceu na formação do número x, repetir-se em algum ponto na mesma ordem, a seqüência de algarismos começará a repetir-se a partir dele e assim teremos uma dízima periódica. Por exemplo, se em algum ponto do número x ocorrer novamente o par (3,5), nessa ordem, os algarismos seguintes serão 83145... e a seqüência de algarismos se repetirá até surgir outro par (3,5). Mas com os dez algarismos $0, 1, ..., 9$ podemos formar apenas um número finito de pares ordenados (100 pares: de (0,0) a (9,9)). Assim, algum par ordenado necessáriamente se repetirá entre os 101 primeiros algarismos do número x e iniciará um novo período de uma dízima periódica. Portanto x é racional. Seria possível determinarmos (sem escrever o número todo) o primeiro par ordenado de algarismos a se repetir? (veja o artigo "Sobre uma questão da IX Olimpíada", de Gisele de Araújo Prateado Gusmão)

6. a)Duas cordas AB e CD de uma circunferência interceptam-se em um ponto P. Mostre que $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.
   b)Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. O gráfico da função $f_{ab}(x) = x^2 + ax - b^2$ intercepta os eixos coordenados em três pontos distintos e C_{ab} é a única circunferência que passa por esses três pontos. Mostre que

todas as circunferências C_{ab}(para diferentes valores de a e b) têm um ponto em comum.

Resolução

a) Acrescentando as cordas AD e CB, formamos dois triângulos semelhantes. De fato os ângulos $B\hat{C}D$ e $B\hat{A}D$ são iguais por serem o ângulo inscrito do arco BD, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ da mesma forma subentendem o arco AC e os ângulos $A\hat{P}D$ e $C\hat{P}D$ são opostos pelo vértice. Da semelhança dos triângulos obtemos $\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB} = \frac{AD}{CB}$ e da primeira igualdade segue-se que $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.

b) O produto das raízes de $f_{ab}(x)$ é $-b^2 < 0$, logo uma das raízes é negativa e a outra é positiva. O gráfico dessa função intercepta o eixo x nas raízes (vamos chamá-las de $-\alpha$ e β, com α e β positivos) e o eixo y em $y = -b^2$. Então os três pontos que determinam a circunferência C_{ab} são $A(-\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$ e $C(0, -b^2)$. Como essa circunferência não é tangente ao eixo y, ela deve interceptá-lo em outro ponto $D(0, d)$. Para localizar esse ponto, observamos que AB e CD são cordas da circunferência C_{ab} que se interceptam na origem O e usamos o resultado demonstrado no ítem a) para oter

$$AO \times BO = CO \times OD \quad \Rightarrow \quad b^2 d = \alpha\beta = b^2 \quad \Rightarrow \quad d = 1$$

Como esse resultado independe dos valores de a e b, concluímos que todas as circunferências C_{ab} passam pelo ponto (0,1). Experimente encontrar o centro e o raio de C_{ab} em termos de a e b.

Notícias

A **X Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás** será realizada no dia **06 de outubro de 2001** das 13:30 h às 18:00h em Goiânia, Catalão, Jataí e Rialma nos campi da UFG e em Anápolis e Iporá nos campi da UEG. Os endereços estão na ficha de inscrição no final desta revista.
Para participar a escola deve ser cadastrada. A ficha de cadastramento se encontra no final desta revista e deverá ser enviada à Coordenação de Olimpíada.
As inscrições deverão ser enviadas à Coordenação de Olimpíadas em Goiânia até 31 de agosto de 2001:
▷ Pelo correio para:
Instituto de Matemática e Estatística IME.
Universidade Federal de Goiás.
Campus Samambaia, Caixa Postal 131. CEP 74 001 - 970, Goiânia, Goiás.
▷ Pelo fax 521 1180. Por favor confirmar recebimento legível.
▷ Pelo endereço eletrônico omeg@mat.ufg.br

Poderão participar, por escola, até:
▷ 5 alunos no nível 1 (5º e 6º séries do Ensino Fundamental)
▷ 5 alunos no nível 2 (7º e 8º séries do Ensino Fundamental)
▷ 10 alunos no nível 3 (Ensino Médio).
A seleção dos alunos participantes na Olimpíada Regional fica a critério da escola, podendo ser utilizada a prova de 1º fase da Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM para esta seleção.

A II Semana Olimpíca e o V Seminário da Olímpiada serão realizados de 04 a 08 de junho de 2001, no Instituto de Matemática e Estatística da UFG.
A programação destes eventos será anunciado às escolas.

A 23°- Olimpíada Brasileira de Matemática será realizada nos níveis 1, 2 e 3 em três fases:
▷ 1º fase 09/06/2001 na escola.

▷ 2º fase 01/09/2001 na escola.
▷ 3º fase 20 e 21/10/2001 no Instituto de Matemática e Estatística da UFG.
Para participar a escola deve se cadastrar na Secretaria da OBM. A ficha de cadastramento pode ser encontrada no site da OBM: www.obm.org.br

Datas de Outras Olimpíadas:
▷ A 42º Olimpíada de Internacional de Matemática - IMO acontecerá de 01 a 14 de Julho de 2001 em Washington, Estados Unidos. Neste evento participam aproximadamente 80 países.
▷ A 16º Olimpíada Iberoamericana de Matemática acontecerá de 23 a 30 de Setembro de 2001 em San Salvador, El Salvador. Participam 21 países dentre os 22 da Organização dos Estados Iberoamericanos.
▷ A 12º Olimpíada de Matemática do Cone Sul acontecerá no Chile, data a ser definida. Os países participantes são: Argentina, Brasil, Bolívia, Chile, Paraguai, Peru, Uruguai e Equador.

• Será realizado o V Encontro de Matemática e Estatística de 04 a 08 de Junho de 2001. Maiores informações pelo telefone 521-1208, pelo e-mail eme@mat.ufg.br ou na homepage www.mat.ufg.br

• O laboratório de Educação Matemática (LEMAT) do Instituto de Matemática e Estatística realizará a VII Jornada de Educação Matemática em novembro. Maiores Informações pelo telefone 521-1124 com Silmara E. de Carvalho das 13h às 17:00 h.
O LEMAT também realiza curso de atualização e presta assessoria a professores do ensino fundamental e médio. Informe-se!

• A XII Jornada de Matemática de Catalão será realizada de 24 a 27 de Outubro de 2001. Maiores informações com o professor André Luiz Galdino pelo e-mail galdino@catalao.ufg.br.

• A V Jornada de Matemática de Rialma será realizada na 1º semana de Julho de 2001. Informações pela homepage www.mat.ufg.br/cursos/interior/rialma.

Sobre uma Questão da IX Olimpíada

Gisele de Araújo Prateado Gusmão - IME - UFG

1. Introdução

A questão 5 da prova do nível 2 e 3 da IX Olimpíada pergunta se o número 0,112358314... é racional ou irracional. O número é construído considerando os dois primeiros algarismos depois da vírgula como sendo 1 e 1, e a partir daí, somando-se os dois números imediatamente anteriores, quando a soma for maior ou igual a dez, considera-se apenas os algarismos das unidades, isto é, o mesmo de se tomar o resto da divisão por dez. A resolução do problema aparece na *página 41*.

O que pretendemos analisar é o período do número 0,112358314..., isto é, qual é o primero par de números que se repete. Veremos que (1,1) é o primeiro par que se repete e ainda é este par que se repete em situações mais gerais.

2. A seqüência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1175 - 1250), ficou conhecido como Fibonacci, contração de filius de Bonacci ou filho de Bonacci. Seu pai foi um comerciante e devido a isso Fibonacci conheceu grandes centros comerciais da Europa, África e Ásia. As atividades do pai despertaram em Fibonacci um grande interesse pela aritmética, e com as viagens ele entrou em contrato com a matemática desenvolvida pelos orientais e árabes.

Fibonacci escreveu seu famoso livro *Liver Abaci*, em 1202, que tem grande improtância pelo fato de introduzir na Europa os algarismos indo-arábicos. Neste livro Fibonacci explica a leitura e a escrita destes novos algarismos e traz vários problemas de álgebra, geometria e também problemas envolvendo juros, permuta de mercadorias e moeda. Talvez o mais famoso destes problemas seja o problema dos coelhos, que deu origem à *seqüência de Fibonacci* [1]. Existe hoje uma literatura muito grande a respeito da seqüência de Fibonacci e suas aplicações, que se entcontram nas mais diversas áreas, tais como filotaxia e a arte. É surpreendente as várias propriedades da *seqüência de Fibonacci*, e é sobre algumas destas propriedades que vamos tratar neste artigo.

Leonardo de Pisa (1175-1250)
Fibonacci

Seja

$$u_1, u_2, ..., u_n, ... \tag{1}$$

uma seqüência tal que

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 2. \tag{2}$$

seqüências deste tipo são chamadas de recorrentes, e a equação (2) é chamada *equação de recorrência*.

A equação (2) define várias seqüências na medida em que varaimos u_1 e u_2. Por exemplo:

$$-1, 4, 3, 7, 10, ...$$
$$-2, 0, -2, -2, -4, -6, ...$$

Para se determinar unicamente a seqüência (1) não basta a equação (2), é preciso mais algumas condições. Os termos de ordem 1 e 2 não são calculados usando a equação de recorrência pois não possuem dois termos antecessores. Logo para determinar unicamente os termos de (1) precisamos de u_1, u_2 e a equação (2).

Um caso especial destas seqüências é a que possui $u_1 = 1$ e $u_2 = 1$, e com a equação (2) temos:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... \tag{3}$$

A esta seqüência damos o nome de *seqüência de Fibonacci*, seus termos são chamados *números de Fibonacci.*

3. Seqüência de Restos

A seqüência formadora do número 0,112358314...,isto é, a seqüência

1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4,...

coincide com a seqüência dos restos da divisão do número de Fibonacci por dez. Dada a seqüência de Fibonacci (3) obtemos a seqüência dos restos na divisão por dez calculando o resto da divisão de cada termo da seqüência por dez, isto é,

1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4,...

Este resultado é verdadeiro para qualquer que seja o divisor m, e não apenas para dez e pode ser demonstrado usando a Divisão Euclidiana [2]. Nestas notas vamos considerar esta última seqüência no caso geral. Representaremos por $\overline{u_n}$ a seqüência dos restos da divisão do número de Fibonacci u_n por $m \in \mathbb{N}$.

Por exemplo:

a) Se $m = 4$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	...
$\overline{u_n}$	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	...

Assim a seqüência dos restos quando $m = 4$ é:

1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3,...

b) $m = 11$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...
$\overline{u_n}$	1	1	2	3	5	8	2	10	1	0	1	1	2	...

Assim a seqüência dos restos quando $m = 11$ é:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, 2, 3,...

Observe que no primeiro exemplo a seqüência de restos tem período 6 e no segundo exemplo a seqüência tem período 10, e ainda nos dois exemplos o primeiro par que repete é (1,1).

A seqüência começa a repetir seus termos quando repete um par de termos na mesma ordem. Logo para provarmos que o primeiro par que se repete é (1,1) vamos considerar a seqüência de pares, isto é,

$$(\overline{u_1}, \overline{u_2});\ (\overline{u_2}, \overline{u_3});\ (\overline{u_3}, \overline{u_4});...$$

considerando que dois pares, $(\overline{u_k}, \overline{u_{k+1}})$ e $(\overline{u_s}, \overline{u_{s+1}})$, são iguais se, e somente se, $\overline{u_k} = \overline{u_s}$ e $\overline{u_{k+1}} = \overline{u_{s+1}}$.

Mostraremos agora que o primeiro par repetido é $(\overline{u_1}, \overline{u_2}) = (1, 1)$. Suponhamos, por contradição, que o primeiro par repetido é $(\overline{u_k}, \overline{u_{k+1}})$ com $k > 1$.
Assim

$$(\overline{u_k}, \overline{u_{k+1}}) = (\overline{u_s}, \overline{u_{s+1}}), \text{ com } s > k.$$

Logo

$$\overline{u_k} = \overline{u_s} \text{ e } \overline{u_{k+1}} = \overline{u_{s+1}}.$$

Usando a equação de recorrência da seqüência de Fibonacci, temos

$$u_{k-1} = u_{k+1} - u_k$$

e

$$u_{s-1} = u_{s+1} - u_s.$$

Pelo algoritmo da divisão euclidiana [2] existem inteiros q_1, q_2, q_3, q_4 tais que

$$\begin{array}{rr} u_{s+1} = q_1 m + \overline{u_{s+1}} & u_s = q_2 m + \overline{u_s} \\ u_{k+1} = q_3 m + \overline{u_{k+1}} & u_k = q_4 m + \overline{u_k}. \end{array}$$

Como

$$\overline{u_k} = \overline{u_s} \text{ e } \overline{u_{k+1}} = \overline{u_{s+1}}$$

e

$$\begin{gathered} u_{s-1} = u_{s+1} - u_s = (q_1 - q_2)m + (\overline{u_{s+1}} - \overline{u_s}) \\ u_{k-1} = u_{k+1} - u_k = (q_3 - q_4)m + (\overline{u_{k+1}} - \overline{u_k}) \\ \Rightarrow u_{s-1} - u_{k-1} \text{ é múltiplo de } m \end{gathered}$$

assim

$$\overline{u_{s-1} - u_{k-1}} = 0 \Rightarrow \overline{u_{s-1}} = \overline{u_{k-1}}$$

.
Logo

$$(\overline{u_{k-1}}, \overline{u_k}) = (\overline{u_{s-1}}, \overline{u_s}).$$

Assim o par $(\overline{u_{k-1}}, \overline{u_k})$ é o primeiro a ser repetido e não $(\overline{u_k}, \overline{u_{k+1}})$ como supomos inicialmente. Logo quando supomos que o primeiro par repetido é $(\overline{u_k, u_{k+1}})$ com $k > 1$ chegamos a uma contradição. Portanto o primeiro par repetido é $(\overline{u_k}, \overline{u_{k+1}})$ com $k = 1$.

Bibliografia

[1] Vorobiov, N.N.; *Números de Fibonacci*, Editora Mir. Moscow, 1974.
[2] Moreira, Carlos G.; *Divisibilidade , Congruência e Aritmética módulo m*, Eureka!, n°2, OBM, IMPA, 1998.

Gisele de Araújo Prateado Gusmão
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Goiânia, GO, Brasil
gisele@mat.ufg.br

A Progressão Aritmética e a Função Afim

Luciana Maria Dias de Ávila - IME - UFG

1. Introdução

Muitas vezes a matemática é estudada como tópicos isolados, por exemplo, estudamos progressão aritmética e função afim sem percebermos as relações existentes entre estes dois conceitos. Com o objetivo de despertar o leitor para este fato, neste texto, mostraremos uma relação existente entre progressão aritmética e função afim. Inicialmente faremos uma breve introdução sobre os conceitos básicos da progressão aritmética e da função afim. A seguir estabeleceremos uma relação existente entre estes conceitos sem a preocupação em formalizar teoremas e daremos alguns exemplos. O que é feito no trabalho não é nada novo e, basicamente tudo pode ser encontrado nas bibliografias citadas.

2. Progressão Aritmética

Uma Progressão Aritmética (P.A.) é uma seqüência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença é chamada de razão da Progressão Aritmética e será representada pela letra "r".

Exemplo 1.

i. $(5, 8, 11, ...)$ é uma Progressão Aritmética de razão r= 3.
ii. $(7, 5, 3, 1, ...)$ é uma Progressão Aritmética de razão r= -2.
iii. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, ...)$ é uma Progressão Aritmética de razão r=0.

Em todos esses exemplos observamos que tomando-se três termos consecutivos, o do meio é a média aritmética dos outros dois.

Em uma Progressão Aritmética com elementos que são números reais, temos:

- Se $r > 0$, a progressão diz-se crescente. (Exemplo *1.i*)
- Se $r < 0$, a progressão diz-se decrescente. (Exemplo *1.ii*)
- Se $r = 0$, a progressão é estacionária ou constante. (Exemplo *1.iii*)

Vamos supor que a sequëncia $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ seja uma Progressão Aritmética de razão r. Observemos que:

$$\begin{gathered} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ ... \\ a_{n-1} = a_{n-2} + r \\ a_n = a_{n-1} + r \end{gathered}$$

Somando membro a membro essas $(n-1)$ desigualdades, obtemos:

$$\begin{gathered} a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n \\ = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + \underbrace{r + r + ... + r}_{(n-1) vezes} \end{gathered}$$

Daí

$$a_n = a_1 + (n-1)r,$$

que é o termo geral de uma P.A. EXEMPLO 2. Obtenha o vigésimo-primeiro termo da Progressão Aritmética $(17, 21, 25, ...)$.
SOLUÇÃO: Temos $a_1 = 17$ e $r = 4$. Queremos obter a_{21}. Como qualquer termos de ordem n é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos que $a_{21} = a_1 + 20r$. Substituindo a_1 e r pelos valores dados, obtemos $a_{21} = 17 + 20.4 = 97$.

3. Um pouco de História...

"*Quando o grande matemático alemão Carl F. Gauss (1777-1855) tinha sete anos de idade, seu professor lhe pediu que calculasse a soma dos inteiros de 1 a 100. O professor ficou surpreso quando, depois de poucos minutos, o pequeno Gauss anunciou que o valor da soma era 5050. A resposta estava correta e, curioso, o professor lhe perguntou como conseguira fazer o cálculo tão rapidamente. Gauss explicou-lhe que somara primeiramente 1+100, 2+99, 3+98,... . Assim obtivera 50 somas iguais a 101 e a resposta era 50*x*101=5050...*"[1]

Vamos detalhar essa solução. Queremos calcular a soma dos números inteiros de 1 a 100. Podemos escrever:

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100$ (1), ou ainda de trás para frente:
$S = 100 + 99 + 98 + ... + 4 + 3 + 2 + 1$ (2). Adicionando (1) e (2), temos:
$2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1)$
$2S = (1 + 100) + (1 + 100) + (1 + 100) + ... + (1 + 100)$
$2S = 100(1 + 100) \Rightarrow S = \frac{100(1+100)}{2} \Rightarrow S = 5050.$

Uma propriedade das Progressões Aritméticas finitas $(a_1, a_2, ..., a_n)$ é que a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos e sempre igual a soma dos extremos $a_1 + a_n$. De fato, sejam a_{k+1} e a_{n-k} dois termos genéricos eqüidistantes dos extremos. Como $a_{k+1} = a_1 + (k + 1 - 1)r$ $= a_1 + kr$, e
$a_{n-1} = a_n - r, a_{n-2} = a_n - 2r, ..., a_{n-k} = a_n - kr$, vem :

$$a_{k+1} + a_{n-k} = (a_1 + kr) + (a_n - kr) = a_1 + a_n.$$

Assim a Progressão Aritmética $(a_1, a_2, ..., a_n)$ pode ser escrita como:

$$(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, ..., a_n - 2r, a_n - r, a_n).$$

Baseado nestas idéias podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética qualquer.

4. Fórmula da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética

Teorema 1.
A soma dos n primeiros termos da Progressão Aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$.
Demostração: Calcular a soma dos n primeiros termos desta Progressão Aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é o mesmo que calcular a soma da Progressão Aritmética finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$. Esta soma pode ser escrita como:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n,$$

ou ainda:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + ... + (a_n - 2r) + (a_n - r) + a_n \qquad (1),$$

agora de trás para frente:

$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + ... + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1 \qquad (2).$$

Somando (1) e (2) obtemos:

$2S_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+...+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)$,

soma com "n parênteses", então:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow S_n = \tfrac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

■

Exemplo 3.

i) Qual é o valor da soma dos 20 primeiros termos da Progressão Aritmética $(2, 6, 10, ...)$:

Solução: $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19 \times 4 = 78$

$$S_{20} = \frac{(2+78)20}{2} = 800.$$

ii) A soma dos n primeiros números inteiros é:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

iii) A soma dos n primeiros números ímpares é:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = \frac{(1+2n-1)n}{2} = n^2.$$

Exemplo 4.

Formam-se n triângulos com palitos, conforme a figura abaixo:

Qual o número de palitos usados para construir n triângulos?

SOLUÇÃO: Observe que o aumento de um triângulo causa o aumento de 2 palitos. O número de palitos constitui-se de uma Progressão Aritmética de razão 2 onde o primeiro termo é $a_1 = 3$. Para calcular o número de palitos usados para construir n triângulos basta calcular o n-ésimo termo desta P.A., ou seja, $a_n = 3 + (n-1)2 = 1 + 2n$.

5. Função Afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Exemplo 5.
I) $f(x) = x$, função identidade.
II) $f(x) = ax + b$, translações.
III) $f(x) = ax$, função linear.
IV) $f(x) = b$, função constante.

EXEMPLO 6. O preço a pagar por uma corrida de táxi é dado por uma função afim $f : x \mapsto ax + b$, onde x é a distância percorrida, o valor inicial b é chamada *bandeirada* e o coeficiente a é o preço de cada quilômetro rodado.

TEOREMA 2.
O gráfico de uma função afim $f : x \mapsto ax + b$ é uma linha reta.
DEMONSTRAÇÃO:
Basta mostrar que três pontos quaisquer $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ desse gráfico são colineares. Para que isto ocorra, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois, onde $d(P, O)$ é a distância entre os pontos $P = (z_1, y_1)$ e $O = (z_2, y_2)$ do plano, dado por $d(P, O) = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Podemos supor $x_1 < x_2 < x_3$ daí:

$$d(P_1, P_2) = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

Portanto:

$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$

■

Geometricamente, b é a ordenada do ponto onde a reta, gráfico da função f, intersecta o eixo OY; o número a chama-se inclinação, ou coeficiente angular dessa reta em relação ao eixo Ox. Observe que quanto maior o valor absoluto de a, mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$ o gráfico de f é uma reta ascendente e quando $a < 0$, a reta é descendente. Para se conhecer uma função $f : X \to Y$, deve-se ter uma regra que permita determinar o valor $f(x)$ *para todo* $x \in X$. No caso particular de uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como seu gráfico é uma reta, e uma reta fica completamente determinada se conhecemos dois de seus pontos, resulta que basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assume em dois números $x_1 \neq x_2$ (arbitrários), para que f fique inteiramente determinada. Com efeito, sabendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é afim e que $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$, queremos determinar os coeficentes a e b de modo que se tenha $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para tal basta resolver o sistema abaixo

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2, \end{aligned}$$

no qual as incógnitas são a e b. A solução é:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}.$$

Observação 1. *Vale observar que o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não paralela ao eixo OY.*

Como uma recíproca do teorema acima temos:
Teorema 3.
Toda reta não vertical r é o gráfco de uma função afim.
Demonstração: Tomemos $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos distintos na reta r, como r é não vertical temos necessariamente $x_1 \neq x_2$, logo pelo resultado anterior existe uma função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. O gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos P_1, P_2 logo esta reta coincide com r. ■

6. Progressão Aritmética e Função Afim

Vimos que o termo geral de uma progressão aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$. Podemos considerar a função que associa a cada natural n o valor de a_n, daí, essa função é simplesmente a restrição da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aos naturais. Portanto pensando em uma progressão aritmética como uma função afim que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma seqüência de pontos colineares no plano. Em outras palavras, (a_n) é uma progressão aritmética se e somente se os pontos do plano que têm coordenadas $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3)$, etc., estão em linha reta.

A seguir faremos uma relação entre progressão aritmética e função afim.

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função afim, $f(x) = ax + b$ e $x_1, x_2, x_3, ...$ é uma progressão aritmética de razão r , então os pontos $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, ...$ formam uma progressão aritmética de razão $y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) = a(x_{i+1} - x_i) = ar = h$. Assim se tivermos uma reta não vertical (gráfico de uma função afim) em $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ e tomarmos sobre ela os pontos $(1, y_1), (2, y_2), ..., (i, y_i), ...$ cujas abcissas são os números naturais $1, 2, 3, ..., i, ...$ as ordenadas $y_1, y_2, ..., y_i, ...$ desses pontos formam uma progressão aritmética.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

Reciprocamente, pode-se mostrar (ver [1] pág. 101) que se uma função monótona $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, x_3, ...$ de razão r numa progressão aritmética $y_1, y_2, y_3, ...$ de razão h onde $y_i = f(x_i)$, esta função é uma função afim $f : x \mapsto ax + b$. Além disso vale $ar = h$.

Exemplo 7. Considere a P.A. $(1, 2, 3, ..., n, ...)$ de razão $r = 1$ e a função afim $f(x) = 2x - 3$. Mostremos que $y_i = f(x_i), i = 1, 2, ...$ formam uma P.A. de razão $h = 2.1 = 2$.

De fato, $y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = 3, ..., y_{n-1} = 2n - 5, y_n = 2n - 3, ...$, e $h = y_2 - y_1 = y_3 - y_2 = ... = y_n - y_{n-1} = 2$.

Exemplo 8. Agora considerando a P.A. $(7, 5, 3, 1, ...)$ de razão $r = -2$ e a função afim $f(x) = -x + 1$, observamos que $y_1 = f(7) = -6,\ \ y_2 = f(5) = -4,\ \ y_3 = f(3) = -2,\ \ , ..., y_i = -x_i + 1, ...$ formam uma P.A. de razão $h = y_2 - y_1 = y_3 - y_2 = ... = y_i - y_{i-1} = 2$.

Exemplo 9. Sejam as progressões aritméticas $(X_i) = (1, 3, 5, 7, ...)$ e $(Y_i) = (2, 4, 6, 8, ...)$ tal que $f(x_i) = y_i$. Queremos calcular a função afim $f(x) = ax + b$.

Observe que $r = 2$ e $h = 2$, e de $ar = h$ temos $a = \frac{2}{2} = 1$. Agora como $f(1) = 2$ temos $2 = 1 \times 1 + b$, logo $b = 1$. Portanto $f(x) = x + 1$.

Ou ainda poderíamos usar que os pontos $(1, 2), (3, 4), (5, 6), ...$ são pontos que pertencem a reta que é o gráfico da função afim que procuramos. Daí $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{3-1} = 1$ e $b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-4}{2-1} = 1$, portanto $f(x) = x + 1$.

Exemplo 10. Um garoto brinca de arrumar palitos fazendo uma seqüência de quadrados como na figura abaixo. Qual a função que relaciona a quantidade de quadradros com a quantidade de palitos?

Solução: Observe que para fazermos um quadrado são necessários 4 palitos, 2 quadrados 7 palitos, 3 quadrados 10 palitos, etc., ou seja, a quantidade de quadrados formados e a quantidade de palitos utizados formam progressões aritméticas de razões 1 e 3 respectivamente:

quadrados formados: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., n, ...

palitos utilizados: 4, 7, 10, 13, 16, ..., 1+3n, ...

Logo a função que associa a quantidade de quadrados com a quantidade de palitos utilizadas é $f(x) = ax + b$ (afim), onde a=3 e b=1, isto é: $f(x) = 3x + 1$.

Bibliografia

[1] Lima, E. L. et alli, *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 1, 2º edição, S.B.M., Rio de Janeiro, R.J., 1997.
[2] Lima, E. L. et alli, *A Matemática do Ensino Médio*, Volume 2, S.B.M., Rio de Janeiro, R.J., 1998.
[3] Iezzi, G. et alli, *Matemática*, 2^o grau, 2^a série, 8^a edição, Atual, São Paulo, S.P., 1990.
[4] Kiyukawa, R. et alli, *Os elos da matemática*, volume 2, 2^a edição, Saraiva, São Paulo, S.P., 1992.

Luciana Maria Dias de Ávila
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Goiânia, GO, Brasil
luavila@mat.ufg.br

Números Naturais e Propriedades Indutivas

Helvécio Pereira de Castro - IME - UFG

1. Introdução

O infinito está presente hoje em quase toda os campos da matemá-tica. Pode-se mesmo definir a matemática, de modo um tanto vago, como a ciência do infinito. A partir de meados do século dezenove, com o trabalho de diversos matemáticos, principalmente Dedekind e Weierstrass, os fundamentos de matemática passaram da geometria para a aritmética, deixando para trás uma visão geométrica que vinha desde os tempos da grécia antiga. Para os gregos, matemática significava o mesmo que geometria. Até o século dezoito e princípios do século dezenove, toda a análise matemática obtinha seus métodos e significados a partir de suas ligações com a geometria.

Então, teve início um enorme esforço de reestruturação da matemática, o que exigiu uma descrição rigorosa do conjunto dos números reais, mostrando como esse conjunto podia ser construído a partir dos números naturais. Os vários métodos que foram propostos para a construção dos números reais, passavam sempre pela necessidade de se usar algum conjunto infinito de números racionais, para se definir um número real. Desta forma, para executar este programa de redução da análise à aritmética, foi necessário introduzir-se conjuntos infinitos nos fundamentos da matemática.

O mais simples de todos os conjuntos infinitos é o sistema dos números inteiros positivos $1, 2, 3, 4, ...$ representado pelo símbolo $I\!N$, e chamado de números naturais. Trataremos, nestas notas, de uma das propriedades fundamentais desse conjunto, o chamado *princípio da indução*, que nos proporciona um método simples e elegante para lidar com o *infinito*.

Na representação dos números naturais, é comum escrever os primeiros números, e em seguida utilizar as reticências para indicar que a lista continua sempre, nunca acaba. Pode-se sempre adicionar 1 para obter outro número ainda maior, não existindo o maior de todos. Dito de outra forma, o conjunto $I\!N$ tem a seguinte propriedade: se um número está nesse conjunto, então o mesmo acontece com seu sucessor. Esta é a propriedade fundamental de que falamos acima.

2. Os Números Naturais

O que é um número natural? O que é o sucessor de um número? Faz parte de uma tendência moderna da matemática, ao abordar uma determinada teoria, de evitar o problema de dizer o que são, ou qual é a natureza dos objetos estudados. Em vez disso, procura-se estudá-los e caracterizá-los através das propriedades por eles possuídas.

O conjunto dos números naturais possui certas propriedades básicas, a partir das quais segue como conseqüência, todas as outras. Após esta constatação, e identificação destas propriedades fundamentais, inverte-se a abordagem, e define-se os números naturais como um conjunto qualquer que satisfaz estas propriedades, que serão agora chamados de *axiomas*. As quatro propriedades fundamentais dos números naturais, chamadas de *axiomas de Peano*, em homenagem a Giussepe Peano (1858 - 1932), são:

a) Existe uma função s definidada de $I\!N$ em $I\!N$. Para cada $n \in I\!N$, o número $s(n)$ é chamado sucessor de n.

b) A função s é injetiva.

c) Existe um único elemento no conjunto $I\!N$ que é diferente de $s(n)$ para todo $n \in I\!N$. Esse elemento é representado pelo símbolo 1.

d) Se A é um subconjunto de $I\!N$ tal que $1 \in A$, e $s(A) \subset A$, então $A = I\!N$.(Obs. a notação $s(A) \subset A$ significa que $s(n) \in A$ para todo $n \in A$).

É claro que o sucessor de um número n é simplesmente o número $n+1$. Então porque complicar a notação e chamá-lo de $s(n)$? Observe que a operação de adição não foi definida ainda, ela é uma operação com números naturais e deve ser definida a partir dos axiomas. O leitor pode consultar a referência [1], para ver como isto é feito e de que maneira podem ser deduzidas outras propriedades dos números naturais.

3. O Princípio da Indução

Um subconjunto $A \subset I\!N$ que possui a propriedade $s(A) \subset A$, enunciada no último axioma acima, é chamado de *conjunto indutivo*. Repare que este axioma diz que $I\!N$ é o único subconjunto indutivo de $I\!N$

que contém o elemento 1. O axioma (d) proporciona uma forma muito útil de fazer certas demonstrações. É o chamado *Princípio da Indução.*

Uma das maneiras de se definir um subconjunto de $I\!N$ é através de uma propriedade. Assim, uma sentença enunciada a respeito dos números naturais, separa os elementos de $I\!N$ em duas partes: aqueles números que possuem a propriedade enunciada e aqueles que não a posuem. Por exemplo, a sentença $P(n)$: "o número n é primo", define o subconjunto formado por todos os números naturais para os quais $P(n)$ é verdadeira, isto é, tais que n é um número primo. Dizemos que uma *propriedade P é indutiva*, se o subconjunto de $I\!N$ determinado por P, para os quais a propriedade é verdadeira, for um subconjunto indutivo. O princípio da indução diz o seguinte:

Princípio da Indução: Se uma propriedade P é indutiva e é verdadeira para 1, então ela é verdadeira para todo número natural n.

Logo, para provar que uma certa propriedade é verdadeira para todo número natural, basta mostrar que é verdadeira para 1, e mostrar que se P for verdadeira para n, então será também verdadeira para o sucessor de n.

Por exemplo, podemos provar utilizando o princípio da indução, que $2^{2n} - 1$ é múltiplo de 3 para todo número natural n. Para $n = 1$, $2^{2n} - 1 = 3$ é múltiplo de 3. Suponha que $2^{2n} - 1 = 3k$ para algum número natural k. Então $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n}2^2 - 1 = 4(1 + 3k) - 1 = 3(4k + 1)$, o que mostra que $2^{2(n+1)} - 1$ é múltiplo de 3. O leitor pode apreciar a simplicidade desta prova. Com algumas poucas operações, chegamos à conclusão que uma infinidade de números, 15, 63, 255, 1023, ... , são todos múltiplos de 3.

Nas demonstrações utilizando o princípio da indução é necessário ter cuidado na aplicação da hipótese de indução. Um exemplo de *demonstração* errada, é ilustrado pelo problema 2, da 19ª Olimpíada Cearense de Matemática de 1999. Esse problema propõe que o candidato descubra onde está o erro na demonstração da seguinte afirmação: **todas as bolas do mundo têm a mesma cor**. Em seguida é apresentada a seguinte *demonstração*, utilizando o princípio da indução: "O resultado é válido para $n = 1$ pois, num conjunto com uma bola, todas elas têm a mesma cor. Suponha que o teorema é válido para todo conjunto com i bolas. Considere um conjunto com $i+1$ bolas. Retirando uma delas, o conjunto restante possui i bolas e pela hipótese indutiva todas possuem a mesma cor, digamos amarela. Retire uma das bolas amarelas desse conjunto e retorne a bola de cor desconhecida, anteriormente retirada. Obtemos novamente um conjunto com i bolas e pelo que foi discutido anteriormente possui $i-1$ bolas amarelas e pela hipótese indutiva possui todas as bolas de mesma cor. Segue que a bola de cor desconhecida também é amarela. Assim todas as $i+1$ bolas são amarelas."

A propriedade $P(n)$ é: *em um conjunto com n bolas, todas elas possuem a mesma cor*. Está correta a afirmação que $P(1)$ é verdadeira. Também está correto o argumento mostrando que se $P(n)$ é verdadeira então $P(n+1)$ também é verdadeira. O problema é que esse argumento só é válido para $n \geq 3$.

Também é comum fazer-se generalizações apressadas, a respeito de afirmativas sobre números naturais. A verificação de que é verdadeira a afirmativa para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, etc, não importa quantos casos sejam verificados, não é suficiente. É fácil enunciar sentenças que são verdadeiras para o primeiro milhão de números, mas não verdadeira para todos. Elon L. Lima, em [1], cita o seguinte exemplo: A afirmação: $n^2 - n + 41$ *é um número primo*, é verdadeira para $n = 1, n = 2$, $n = 3, ..., n = 40$, e é falsa para $n = 41$.

Utilizando-se os axiomas de Peano, prova-se uma versão mais geral do princípio da indução, chamado de princípio da inducão generalizado: Se um número m goza da propriedade P, e supondo que n goza da propriedade P mostra-se que seu sucessor tamém goza da propriedade P, então todos os números naturais maiores ou iguais a m gozam da propriedade P. Existe também um outro princípio de indução, chamado segundo princípio da indução, que decorre da proposição a seguir, cuja prova pode ser vista em [1].

Segundo Princípio da Indução: Seja $A \subset I\!N$ um subconjunto com a seguinte propriedade: Dado $n \in I\!N$, se todos os números naturais menores que n pertencem a A, então $n \in A$. O segundo princípio da indução afirma que um conjunto $A \subset I\!N$ com essa propriedade, coincide com $I\!N$.

Decorre desta proposição, que se a validade de uma propriedade P para todo número natural menor que n implicar que P é verdadeira para

n, então P é verdadeira para todos os números naturais.

4. Recorrências

O conceito de função é um dos objetos mais fundamentais da matemá- tica. Observe que já nos axiomas de Peano, aparece o conceito de função, para formalizar a idéia de sucessor de um número. Dados dois conjuntos X e Y, uma função f definida em X (domínio) com valores em Y (contra-domínio) está determinada quando se estabelece uma regra, que mostre de que maneira deve-se associar a cada elemento x de X um único elemento em Y, que é denotado por $f(x)$. Isto é denotado por $f : X \to Y$.

Usualmente as funções definidas em conjuntos numéricos, são especificadas por uma fórmula, mas exitem outras maneiras de definir uma função. No problema 2 da Olimpíada Brasileira de Matemática-Sênior de 1997 ($2^{\underline{a}}$ fase), uma função f é definida da seguinte maneira: " Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ satisfaz a propriedade $P(n)$ se A tem n elementos e $A + A = \{x + y, \text{ tal que } x \in A \text{ e } y \in A\}$ tem $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos. Dado $A \subset \mathbb{N}$ finito definimos diâmetro de A como sendo a diferença entre o maior e o menor elemento de A. Seja $f(n)$ o menor diâmetro que o conjunto A satisfazendo $P(n)$ pode ter ". Na definição desta função, quando se diz "o menor diâmetro que o conjunto A satisfazendo $P(n)$ pode ter", está implícito o chamado *princípio da boa ordenação*, que é outra propriedade dos números naturais demonstrada a partir do princípio da indução.

Quando se trata de definir uma função, cujo domínio é o conjunto dos números naturais, basta dizer qual é o valor da função em 1 e estabelecer uma regra que permita calcular f no sucessor de n a partir do conhecimento de f em n. Isto define f para todo $n \in \mathbb{N}$, pelo princípio da indução.

Para ilustrar esta situação, considere o seguinte exemplo. A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ está definida quando se afirma que $f(n)$ é a soma dos n primeiros quadrados. Esta regra permite calcular o valor de f para qualquer número natural que se queira. Esta função pode ser definida por recorrência, simplesmente declarando que $f(1) = 1$ e $f(n + 1) = f(n) + (n + 1)^2$. Neste caso, poderíamos também definir f por uma expressão, escrevendo $f(n) = n^3/3 + n^2/2 + n/6$, para cada número n.

Revista da Olimpíada, n$^{\underline{o}}$ 2, 2001.

É comum depararmos com funções definidas nos números naturais por alguma regra ou então por uma recorrência, e em seguida procurar obter mais informação a respeito da função, ou provar alguma propriedade da mesma. Os problemas a seguir ilustram esta situação.

1. (Problema 3 da VII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás-1998):Uma maneira de calcular o valor aproximado da raíz quadrada de um número $c > 0$, conhecida desde a época dos babilônios, é calcular os termos da seqüência $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$, para algum valor inicial a_1. Mostre que a seqüência satisfaz a seguinte propriedade: $a_2 > a_3 > ... > a_n > a_{n+1} > ....$

2. (Problema 3 da XXII Olimpíada Brasileira de Matemática-2000): Seja f uma função definida nos inteiros positivos da seguinte forma: Dado n, escrevemos $n = 2^a(2b+1)$, com a e b inteiros e definimos $f(n) = a^2 + a + 1$. Determine o menor inteiro positivo n tal que $f(1) + f(2) + ... + f(n) \geq 123456$.

3. (Problema 5 da 19ª Olimpíada Cearense de Matemática-1999): Seja n um inteiro positivo e $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores positivos de n. Prove que $\sigma(n) + \sigma(n+1) > \frac{5}{2}n$, para todo n.

Examinemos com mais detalhe a seguinte função $S_p(n)$, definida para todo $n \in I\!N$, por

$$S_p(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p \ , \ \text{ onde } \ p \ \text{ é um número natural fixo}$$

O caso $p = 1$ é simplesmente a soma de uma progressão aritmética, e $S_1(n) = n^2/2 + n/2$. Para $p = 2$, $S_2(n)$ é a soma de quadrados, e como vimos acima, pode ser dada pela expressão $S_2(n) = n^3/3 + n^2/2 + n/6$. E para $p = 3$? Um modo de se obter uma expressão para $S_3(n)$ é considerar o desenvolvimento binomial $(i+1)^4 = i^4 + 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$. Somando-se os dois membros desta expressão, com i variando de 1 a n, e levando em conta as funções $S_1(n)$ e $S_2(n)$ acima, chega-se a uma expressão para $S_3(n)$. Esse processo pode ser repetido para cada $p \in I\!N$, e embora seja simples em princípio, não dá uma boa informação sobre o comportamento geral de $S_p(n)$.

Por exemplo, é relativamente simples provar, usando o processo acima, que $S_p(n)$ *é um polinômio de grau* $p+1$ *na variável* n. Daria um pouco mais de trabalho provar que *o coeficiente do termo de grau* p *desse polinômio é sempre igual a 1/2, para todo* $p \in \mathbb{N}$.

É possível obter uma recorrência, que permite calcular facilmente $S_{p+1}(n)$ quando se conhece $S_p(n)$. Dado um polinômio qualquer

$$P(n) = a_{p+1}n^{p+1} + a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + ... + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

definimos o **polinômio derivado** de $P(n)$, por

$$P'(n) = (p+1)a_{p+1}n^p + pa_p n^{p-1} + (p-1)a_{p-1}n^{p-2} + ... + 2a_2 n + a_1$$

O leitor que conhece os conceitos do cálculo diferencial, notará que não é mera coincidência o nome de polinômio derivado dado acima, mas isto é outra história. A definição dada acima envolve somente um processo formal. Por exemplo, o polinômio derivado de $S_2(n)$ é $S_2'(n) = n^2 + n + 1/6$. Observe que a diferença entre $\frac{S_2'(n)}{2}$ e $S_1(n)$ é uma constante. Afirmamos que este fato é recorrente, no número natural p.

O leitor está convidado a demonstrar a propriedade seguinte, utilizando o princípio da indução:

$$S_p(n) = \frac{S_{p+1}'(n)}{p+1} + \frac{p+1-S_{p+1}'(1)}{p+1}, \text{ para todo número natural } p.$$

Observe que isto permite obter sucessivamente, de uma maneira muito simples, as expressões:

$$S_3(n) = n^4/4 + n^3/2 + n^2/4 \ , \ S_4(n) = n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30 \ , ...$$

Para obter estas funções é necessário observar que $S_p(1) = 1$ para qualquer p.

Bibliografia

[1] Lima, E. L.; *O Princípio da Indução*, Eureka!, vol. 3, OBM, IMPA, 1998.

[2] Davis, P. J. e Hersh R.; *A Experiência Matemática*, Livraria Francisco Alves Editora S.A., 1985.

Helvécio Pereira de Castro
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Goiânia, GO, Brasil
hpcastro@mat.ufg.br

Uma Aplicação de Matemática Financeira

Miguel Antônio Camargo - IME - UFG

1. Introdução

Nosso objetivo neste texto é mostrar ao professor de matemática do ensino fundamental e médio que a matemática financeira básica é um conteúdo muito simples de ser ensinado em qualquer nível, além de ser de extrema necessidade a todas as pessoas. Todo indivíduo faz compras, eventualmente a crédito, isso já é suficiente para mostrar a necessidade de um mínimo de conhecimento sobre o assunto. Só para dar exemplo, imagine uma pessoa que pode pagar uma prestação fixa, digamos, de 200 reais por mês, por um longo período, e deseja adquirir um automóvel ou mesmo uma casa para morar, qual deverá ser o preço à vista deste bem?

2. Preliminares

2.1 Conceitos

A operação básica de matemática financeira é a de empréstimo. Um certo capital C *chamado de principal* é emprestado a alguém por um certo período de tempo. Após este período, o capital C é devolvido, acrescido de uma remuneração J *chamada de juro* pelo empréstimo. A soma $C + J = M$ é chamada de *montante*. A razão $i = \frac{J}{C}$, que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de *taxa de juros*.

EXEMPLO 1. *Maria tomou um empréstimo de 200 reais. Dois meses após, pagou 260 reais. Os juros pagos são de 60 e a taxa de juros é* $i = \frac{60}{200} = 0,30 = 30\%$ *ao bimestre, o principal, que é a dívida inicial de Maria, é de 200 reais, e o montante, que é a dívida de Maria na época do pagamento, é 260 reais. Obs: 200 reais hoje, é equivalente, para Maria e quem a emprestou, a 260 reais dois meses após o empréstimo.*

EXEMPLO 2. *Maria tomou um empréstimo de 200 reais, a juros de 10% ao mês. Após um mês, a dívida de Maria será acrescida de* $0.1 \times 200 = 20$ *de juros* $J = i \times C$*, passando a 220 reais. Se Maria e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês,* *mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois de contraído, por 242 reais, pois os juros relativos ao segundo mês serão* $0,1 \times 220 = 22$ *rais. Esses juros aqui calculados são chamados de juros compostos.*

2.2 Progressão Geométrica

Uma progressão geométrica é uma seqüência $a_1, a_2, ..., a_n...$ em que o quociente da divisão de cada termo, a partir do segundo, pelo seu antecedente é constante. O quociente é denominado *razão* da Progressão Geométrica.

EXEMPLO 3.

- 1,2,4,8,... é uma Progressão Geométrica de razão 2;
- 12,3,$\frac{3}{4}$,$\frac{3}{16}$,$\frac{3}{64}$,... é uma Progressão Geométrica de razão $\frac{1}{4}$;
- 1,-2,4,-8,... é uma Progressão Geométrica de razão -2;

TEOREMA 1. *Em toda progressão geométrica* $a_1, a_2, ..., a_n...$ *de razão* q*, tem-se, para todo natural* n*,* $a_n = a_1 q^{n-1}$.
DEMONSTRAÇÃO: Temos $\frac{a_2}{a_1} = q$, $\frac{a_3}{a_2} = q$, $\frac{a_4}{a_3} = q$, ... , $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Multiplicando todas essas $n-1$ igualdades, obtemos, $\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}$, que é o resultado desejado.

TEOREMA 2. *A soma dos* n *primeiros termos de uma progressão geométrica* $a_1, a_2, ..., a_n...$ *de razão* $q \neq 1$ *é* $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.
DEMONSTRAÇÃO: Seja $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$ a referida soma, multiplicando-a por q, obtemos $qS_n = a_2 + ... + a_{n-1} + a_n + a_n q$. Subtraindo uma igualdade da outra, obtemos $S_n - qS_n = a_1 - a_n q = a_1 - a_1 q^n$, daí $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.
COROLÁRIO 1. *O limite da soma* S_n *dos n primeiros termos da progressão geométrica* $a_1, a_2, ..., a_n...$ *de razão q, com* $\mid q \mid < 1$*, é igual a* $S = a_1 \frac{1}{1-q}$.
JUSTIFICATIVA: Basta notar que $\mid q \mid^n$ tende para zero quando n tende para infinito.

3. Equivalência de Capitais

A equivalência de capitais é o raciocínio básico da matemática financeira. Conceitualmente, dois capitais representativos dizem-se equivalentes quando, a uma certa taxa de juros, produzem montantes iguais numa data comum. Por exemplo, 120 reais daqui a um ano é equivalente a 100 reais hoje, se a taxa de juros for de 20% ao ano.

TEOREMA 3. *No regime de juros compostos de taxa i, um capital inicial C_0 transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante*

$$C_n = C_0(1+i)^n.$$

DEMONSTRAÇÃO: Para cada k, seja C_k a dívida após k períodos de tempo. Temos $C_{(k+1)} = C_k + iC_k = (1+i)C_k$aí C_k é uma progressão geométrica de razão $1+i$, logo $C_n = C_0(1+i)^n$.

EXEMPLO 4.

Maria tomou um empréstimo de 300 reais a juros de 12% ao ano. Qual será a dívida de Maria três anos depois?

Resolução: $C_3 = C_0(1+i)^3 = 300(1+0,12)^3 = 421,48.$

Um modo interessante de entender o teorema 3 acima, é que uma quantia, hoje igual a C_0 , transforma-se, após n períodos de tempo, em $C_0(1+i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$.

Essa é a fórmula fundamental de equivalência de capitais: Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$ e, para obter o valor atual, basta dividir o valor futuro por $(1+i)^n$.

4. Taxas de juros

Observe a afirmação: "*Empresta-se um acapital C à taxa de* 24% *ao ano, capitalizados mensalmente.*"

Afirmações como estas são muito comuns em contratos financeiros. Nesses casos, em geral, as instituições cobram 2% de taxas de juros ao mês, considerando que 24% ao ano signifique 2% ao mês, esse fato é muito comum, apesar de produzirem montantes diferentes. Elas produziriam o mesmo montante se o regime fosse o de juros simples.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

A taxa de 24% ao ano, dada na situação acima é denominada *taxa nominal*, enquanto a taxa de 2% ao mês que corresponde a 26, 82% ao ano é a taxa efetiva. Portanto, a *taxa efetiva* é aquela que é efetivamente paga.
Taxas são *equivalentes* quando ao final de um mesmo período de tempo, produz um mesmo montante, se aplicada sobre um mesmo capital. Por exemplo 2% ao mês e 26, 82% ao ano, ou 24% ao ano e 1, 808758% ao mês são equivalentes. Verifique isso.
As taxas 2% ao mês, 8% ao trimestre, 12% ao semestre, 24% ao ano, 120% a cinco anos, como no exemplo acima são chamadas *taxas proporcionais* mas não são equivalentes.

TEOREMA 4. *Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual i_1, e a taxa de juros equivalente relativa a K sub-períodos é i_k, então $1 + i_1 = (1 + i_k)^k$.*
DEMONSTRAÇÃO: Seja C_0 uma capital inicial, como são equivalentes as taxas acima, então ao final do período os montantes deverão ser iguais, logo

$$C_0(1 + i)^1 = C_0(1 + i_k)^k \Rightarrow 1 + i_1 = (1 + i_k)^k$$

5. Descontos

Quando uma instituição empresta dinheiro, o tomador do empréstimo emite, em geral, uma nota promissória, que é um documento no qual o devedor do empréstimo se compromete a pagar a dívida, em uma data prefixada, uma quantia, que é chamada de valor de face da nota A instituição recebe a promissória de valor de face F e entrega ao cliente uma quantia A, obviamente menor que F. A diferença $F - A$ é chamada de desconto.

Os bancos usam, em geral, principalmente para prazos pequenos, o chamdo desconto bancário simples ou desconto por fora, cujo cálculo se dá através da expressão $A = F(1 - dn)$, onde d é a taxa de desconto bancário e n é o prazo da operação.

EXEMPLO 5.
Maria desconta uma promissória de 1000 reais, com vencimento em

60 dias, em um banco cuja taxa de desconto é de 8% ao mês.

a) Quanto Maria receberá?

b) Qual a taxa mensal de juros que Maria realmente está pagando?

c) Se o vencimento da promissória for em um ano quanto Maria irá receber? Qual a taxa de juros que está pagando?

Resolução:

a) $A = F(1 - dn) = 1000(1 - 0,08 \times 2) = 840$; assim Maria receberá 840, para pagar 1000 em 2 meses.

b)Se i é a taxa mensal de juros que Maria está pagando, então $1000 = 840(1 + i)^2$. Daí $i \simeq 9,1\%$

c)$A = F(1 - dn) = 1000(1 - 0.08 \times 12) = 40$

6. Série de pagamentos

Um conjunto de valores - *recebimentos ou pagamentos* - referidos a épocas diversas, é denominado *série de pagamentos ou renda*. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita $uniforme$.

Exemplo 6. Um objeto, cujo preço à vista (valor atual) é 120 reais, é vendido em 8 prestações mensais e iguais de $20,88$ reais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Nesse caso a taxa de juros foi de 8% ao mês. As oito prestações constituem uma série uniforme de pagamentos, nesse caso, a série é dita postecipada, pois a primeira prestação só é paga um período depois da compra.

Teorema 5. *O valor atual (preço à vista) de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um período de tempo antes do primeiro pagamento(postecipada),é igual a $A = P\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$, onde i é a taxa de juros.*

Demonstração: Devemos notar em primeiro lugar que o valor da primeira parcela um período antes de seu pagamento (no momento da compra) vale $\frac{P}{1+i}$, isso porque é o valor que aplicado à taxa i de juros produzirá, em um período, o montante P, o valor da segunda parcela dois períodos antes de seu pagamento (no momento da compra) é $\frac{P}{(1+i)^2}$, e assim por diante, até o n-ésimo pagamento, somando todas as parcelas obtém-se $A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{p}{(1+i)^n} \Rightarrow A = P\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$,pois é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de n termos e razão $\frac{P}{1+i}$.

COROLÁRIO 2. *O valor futuro de uma série uniforme na época do último pagamento é* $F = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}$. *Esse valor futuro é o valor do montante acumulado de n parcelas iguais a P, no momento do último depósito.*

Demonstração: Basta observar que $F = A(1+i)^n$.

EXEMPLO 7. *Poupança programada*

Quanto devo depositar mensalmente em uma aplicação que rende 2% ao mês, para que no momento do 12° depósito o capital acumulado seja 5 000?

Temos que $F = P\frac{(1+i)^n - 1}{i}$, daí $5000 = P\frac{(1{,}02)^{12} - 1}{0{,}02} \Rightarrow P \simeq 372,80$.

COROLÁRIO 3. *O valor de uma infinidade de termos iguais a P, um período antes do 1° pagamento é, sendo i a taxa de juros, igual a* $\frac{P}{i}$.

DEMONSTRAÇÃO: Basta tomar o limite, com n tendendo a infinito, em $A = P\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$

7. Aplicação

Suponha que uma pessoa deseja adquirir um bem, por exemplo, uma casa ou um veículo, através de um financiamento a longo prazo. Admitindo que a prestação que a pessoa possa pagar seja de 200 reais por mês e que a instituição financeira cobra uma taxa de juros de 12% ao ano, capitalizados mensalmente, utilizando taxas proporcionais, isto é 1% ao mês. Qual é o valor à vista do bem que a pessoa pode adquirir?

Resolução: Sabemos que $A = P\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$, onde A é o valor pedido, $P = 200$, $i = 1\% = 0,01$ e n é o número de parcelas. Calcularemos o valor para alguns valores de n, por exemplo:

$$n = 36 \textit{ meses } (3 \textit{ anos});\ A = 6\ 021,50;$$

$n = 60$ *meses* (5 *anos*); $A = 8\,991,00$;
$n = 96$ *meses* (8 *anos*); $A = 12\,305,54$;
$n = 120$ *meses* (10 *anos*); $A = 13\,940,10$;
$n = 144$ *meses* (12 *anos*); $A = 15\,227,93$;
$n = 180$ *meses* (15 *anos*); $A = 16\,664,33$;
$n = 240$ *meses* (20 *anos*); $A = 18\,163,88$;
$n = 300$ *meses* (25 *anos*); $A = 18\,989,31$;
$n = 360$ *meses* (30 *anos*); $A = 19\,443,66$;
$n = 420$ *meses* (35 *anos*); $A = 19\,693,76$;
$n = 480$ *meses* (40 *anos*); $A = 19\,831,43$;

Quantas prestações de 200 reais um indivíduo deverá pagar, nessas condições, para adquirir um bem de 20 000,00 reais?

É impossível a pessoa adquirir esse bem, pois deverá pagar uma infinidade de prestações. Para verificar esse fato, basta observar o corolário 2, onde mostra que o valor de uma infinidade de parcelas iguais é $\frac{P}{i}$, *nesse caso* $\frac{P}{i} = \frac{200}{0.01} = 20\,000$.

Retomando o exemplo, onde $i = 1\%$, $A = 16\ 000$, admitindo que uma pessoa possa pagar prestações um pouco maiores, qual das situações abaixo seria mais conveniente para o comprador do bem?

$n = 15$ anos, $P = 192,02$;
$n = 12$ anos, $P = 210,14$;
$n = 10$ anos, $P = 229,55$;
$n = 08$ anos, $P = 260,00$;
$n = 05$ anos, $P = 355,91$;

A resposta a essa questão, achamos que depende de diversas variáveis, e essas de cada situação individual, portanto, não sabemos respondê-la, apenas foi um exemplo para reflexão.

Bibliografia

[1] Morgado, Eduardo Wagner e Zani, Sheila C.; *Progressões e Matemática Financeira*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 1993.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

[2] Crespo, Antônio.; *Matemática Comercial e Financeira Fácil*, Ed.Saraiva, 12° edição, 1997.

[3] Spinelli, Wagner e Souza, Maria Helena S.;*Matemática Comercial e Financeira*, Ed. Ática, 1998.

Miguel Antônio Camargo
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Goiânia, GO, Brasil
miguel@mat.ufg.br

Resoluções Comentadas das Provas das três Primeiras Olimpíadas

Heloísio Caetano Mendes - IME - UFG
Bolsista PROCOM

Resolução comentada da Prova da I Olimpíada/1992

1. Duas professoras, A e B, vão e voltam juntas do trabalho, a cada dia no carro de uma delas. As distâncias das casas de A e B até o trabalho são, respectivamente, 13 km e 16 km enquanto que a distância entre as casas é de $5km$. Supondo que cada dia uma professora vá até a casa da outra e daí até o trabalho, voltando pelo mesmo trajeto, responda:
   a)Qual é o menor número de vezes que as professoras deverão ir ao trabalho para que cada uma percorra, no seu carro, a mesma distância que a outra?
   b)Quantas vezes cada professora irá no seu próprio carro?

Resolução

O enunciado nos fornece as seguintes informações.

*Carro de A Percurso: $5 + 16 = 21km$

*Carro de B Percurso: $5 + 13 = 18km$

Distâncias percorridas, considerando ida e volta:

$(21 + 21)x$ é a distância percorrida por A
$(18 + 18)y$ é a distância percorrida por B,
onde x e y representam o número de vezes que as professoras A e B, respectivamente, vão com seus carros.

O que queremos saber agora é: *Quais os valores de x e y para que ocorra a igualdade entre os percursos?* O número $42x = 36y$ deve ser múltiplo de 42 e 36. Para que seja o menor possível basta tomarmos o $mmc(42, 36) = 252 \Rightarrow x = 6, y = 7, x + y = 13$

Logo, a) O menor número de vezes que as professoras deverão ir à escola é 13 vezes. b) A professora A irá 6 vezes no seu carro e a professora B irá 7 vezes , assim percorreram a mesma distância.

2. Sejam A, B e C pontos de uma circunferência de centro no ponto O. Prove que:
a)Se AB é um diâmetro da circunferência, então o ângulo CÔB mede o dobro de CÂB. (Obs.: Não vale utilizar o fato de o triângulo A$\hat{\text{B}}$C ser retângulo).
b)Mesmo que AB não seja um diâmetro da circunferência, CÔB mede o dobro de CÂB.
c)Se AB é um diâmetro da circunferência, então o triângulo de vértices A, B e C é retângulo.

Resolução

a)

(i)$2\beta + \theta = 180°$
(ii)$\alpha + \theta = 180°$

De (i) e (ii), temos $\alpha = 2\beta$, logo CÂB= $\frac{1}{2}$CÔB.

b)Basta considerarmos o diâmetro que contém AO e aplicarmos duas vezes o argumento do item "a)" para obter

$$\text{C}\hat{\text{A}}\text{D} = \tfrac{1}{2}\text{C}\hat{\text{O}}\text{D} \text{ (i)}$$
$$\text{D}\hat{\text{A}}\text{B} = \tfrac{1}{2}\text{D}\hat{\text{O}}\text{B} \text{ (ii)}$$

De (i) e (ii), temos que $\text{C}\hat{\text{A}}\text{B} = \frac{1}{2}\text{C}\hat{\text{O}}\text{B} \Rightarrow \text{C}\hat{\text{O}}\text{B} = 2\ \text{C}\hat{\text{A}}\text{B}$.

c)

$2x + 2\beta = 180° \Rightarrow x + \beta = 90°$.

3. Dada uma função $f(x)$ definimos $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f^2(x))$ e, em geral, $f^{(n+1)}(x) = f(f^n(x))$. Seja então

$g(x) = \frac{-3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$. Calcule $g^{1992}(0)$.

Resolução

$g(0) = 1$
$g^2(0) = g(g(0)) = g(1) = 2$
$g^3(0) = g(g^2(0) = g(2) = 0$

A partir daqui ocorre uma repetição dos resultados anteriores, assim: $g^4(0) = g(g^3(0)) = g(0) = 1$
$g^5(0) = g(g^4(0)) = g^2(0) = 2$
$g^6(0) = g(g^5(0)) = g^3(0) = 0$
Vamos mostrar primeiro que $g^n(0) = 0$ quando n é múltiplo de 3 utilizando o princípio de indução. Sobre o princípio de indução veja "*Números Naturais e Propriedades Indutivas*", nesta revista. Se $n = 3$ já vimos que $g^3(0) = 0$. Vamos supor que para $n = 3k$ tenhamos $g^{3k}(0) = 0$, e vamos provar que $g^{3(k+1)}(0) = 0$.

$$g^{3k+3}(0) = g^{3k}(g^3(0)) = g^{3k}(0) = 0$$

Logo podemos afirmar que $g^n(0) = 0$ qdo n é múltiplo de 3. Como $1992 = 3 \times 664$ temos que

$$g^{1992}(0) = 0.$$

4. Com vértices nos pontos médios das arestas de um cubo traça-se, sobre cada face do cubo, um quadrado. Ficam assim definidas oito pirâmides de base triangular, cada uma delas contendo um vértice do cubo e possuindo arestas da base iguais aos lados dos quadrados acima descritos. Retirando-se estas oito pirâmides do cubo, obtemos um sólido que se chama cubo truncado. Calcule, em função da aresta do cubo, a área total do cubo truncado.

Resolução

Se a aresta do cubo vale a, vemos que cada aresta do cubo truncado vale $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Como sua área é composta por seis quadrados e oito triângulos equiláteros, todos de lado $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, temos

$$A = 6(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{8}{2}(\frac{a\sqrt{2}}{2})(\frac{a\sqrt{6}}{4})$$

5. Suponha que um número natural n seja fatorado do seguinte modo:

$$n = 2^2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$$

a) Quantos divisores possui o número n?
b) Que relação existe entre o número de divisores e os expoentes dos fatores primo de n?
c) Encontre o menor número natural que possui exatamente 22 divisores distintos.

Resolução

Seja d um divisor de $n = 2^2 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$, logo os fatores primos de d são 2, 3, 5 e 7, e assim:

$$d = 2^r \times 3^s \times 5^t \times 7^u$$

onde, $r, s, t, u \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r, s \leq 2, 0 \leq t \leq 3$ e $0 \leq u \leq 1$.
a) Para determinar o número de divisores de n basta determinar o número de expoentes possíveis de d. Por exemplo: com os expoentes 0, 0, 0, 1 e 0 de r, s, t e u respectivamente tem o divisor $d = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^0 = 5$. Estabelecem assim uma relação biunívoca

$(0,0,1,0) \rightarrow d = 2^0 \times 3^0 \times 5^1 \times 7^0$.
Assim, para determinar o número de divisores basta determinar o número de quadras ordenadas distintas. Como r e s podem ter 3 valores distintos (0,1,2), t pode ter 4 valores distintos (0,1,2,3) e u pode ter 2 valores (0,1) distintos, o número de quadras distintas é

$$3 \times 3 \times 4 \times 2 = 72$$

Portanto n tem 72 divisores distintos.
b) O número de divisores de n é dado por $3 \times 3 \times 4 \times 2 = (2+1)(2+1)(3+1)(1+1)$. Observe que 2 é o expoente de 2 e 3, 3 é o exponente de 5 e 1 de 7. Generalizando este resultado temos; se $n = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times ...P_n^{\alpha_n}$ então o número de divisores de n é $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_n+1)$. Veja prova deste resultado em [1] página 55.
c) Devemos encontrar um número n que após fatorado gere expoentes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ tais que $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_r+1) = 22$. Mas $22 = 2 \times 11$ logo devemos ter $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 10$. O menor inteiro com estes expoentes é $2^{10} \times 3^1$.

6. Dizemos que uma fração possui representação decimal finita caso não seja uma dízima periódica infinita. Por exemplo, $\frac{1}{5} = 0,2$ possui representação decimal finita, enquanto que $\frac{1}{3} = 0,33...$ não. Prove que os números a e b são primos entre si, então a fração $\frac{a}{b}$ possui representação decimal finita se, e somente se, os únicos divisores primos de b forem 2 ou 5.

Resolução

A fração $\frac{a}{b}$ possui representação decimal finita $\iff b = 2^n 5^m$, n, $m \in \mathbb{N}$
($\Rightarrow$)
Temos que $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^n 5^m}$ Para transformar este número em um número com representação decimal podemos transformar o denominador numa potência de dez. Faremos assim, se $m > n$, $\frac{a}{2^n 5^n}\frac{2^{m-n}}{2^{m-n}} = \frac{a2^{m-n}}{2^n 2^{m-n} 5^m} = \frac{a2^{m-n}}{2^m 5^m} = \frac{a2^{m-n}}{10^m}$, assim $\frac{a}{b} = \frac{a2^{m-n}}{10^m}$ logo $\frac{a}{b}$ sob as condições dadas pode ser escrito em forma decimal finita. No caso $n > m$ multiplicamos por 2^{n-m} ao invés de 2^{m-n}.
($\Leftarrow$)

Como $\frac{a}{b}$ pode ser escrito na form $c_0, c_1c_2c_3...c_n$ temos $\frac{a}{b} = c_0, c_1c_2c_3...c_n$ $2 = \frac{c_0c_1c_2c_3...c_n}{10^n}$. Logo o número tem b da forma 2^n5^s.

Resolução comentada da Prova da II Olimpíada/1993

1. Seja Q_0 um quadrado de lado 1 cm. Pelos vértices de Q_0 traçam-se quatro retas paralelas às diagonais de Q_0 obtendo-se um quadrado Q_1 circunscrito a Q_0. Repete-se o processo com Q_1, obtendo-se Q_2 e assim em diante.

   a)Faça uma ilustração da situação descrita.
   b)Qual é maior, a área de Q_{150} ou a área do Brasil (= 8 521 000 km^2)?

Resolução

a)A figura é esta:

b)Como o lado do quadrado Q_1 é paralelo à diagonal de Q_0, Temos que $D^C H = 45°$ e $cos 45° = \frac{l_1}{2}$ onde l_1 é o lado do quadrado Q_1. Logo $L_1 = \sqrt{2}$.
Para o quadrado Q_2, de forma análoga temos $cos 45° = \frac{l_2}{2l_1}$ $\Rightarrow l_2 = l_1\sqrt{2} \Rightarrow l_2 = (\sqrt{2})^2$.
Pelo princípio de indução para provar que $ln = (\sqrt{2})^n \ \forall\ n \in \mathbb{N}$ basta mostrar que se supomos que $ln = (\sqrt{2})^n$ então $l_{n+1} = (\sqrt{2})^{n+2}$.
$\alpha = 45°$ e $cos 45° = \frac{l_{n+1}}{2l_n} \Rightarrow l_n = l_{n+1}\sqrt{2} = (\sqrt{2})^{n+1}$.
Portanto $l_n = (\sqrt{2})^n \ \forall n \ \in \ \mathbb{N}$. Logo a área do n-ésimo quadrado é $A = (\sqrt{2})^{2n} = 2^n$.
Assim, para $n = 150$ temos $A = 2^{150}\ cm^2$.
Seria este número maior ou menor que 8 512 000 km^2? Vejamos,

$2^{150} = (2^{10})^{15} = (1\ 024)^{15} > (10^3)^{15} = 10^{45}\ cm^2 = 10^{35}\ km^2$ mas $10^{35} >> 1\ 000\ 000\ 000$ e $1\ 000\ 000\ 000 km^2 > 8\ 512\ 000\ km^2$.
A partir do exposto acima temos que $2^{150}\ cm^2$ é maior que a área do Brasil.

2. Roberto e Flávia são irmãos nascidos neste século(séc. XX). Por coincidência, os quatro algarismos do ano de nascimento de Roberto são os mesmos do ano no qual ele fez 18 anos, e o mesmo é verdade para Flávia.
O ano no qual Roberto nasceu é divisível por cinco e o ano no qual Flávia fez dezoito anos é divisível por oito. Em que ano nasceram Roberto e Flávia?

Resolução

Roberto e Flávia nasceram entre 1901 e 2000.
Roberto nasceu em $19ab$ e Flávia em $19cd$ onde $19ab = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + a \times 10 + b$ e $19ab + 18 = 19ba$ onde $19ab$ é divisível por 5 (I).
Assim;
$1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + a \times 10 + b + 18 =$
$1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 10 \times b + a \Rightarrow a - b = \frac{-18}{9} \Rightarrow b - a = 2$ (II)
Da mesma forma para a idade de Flávia temos: $c - d = 2$(III) e $19dc$ divisível por 8 (IV)
Basta agora que escolher os anos que satisfazem as condições acima.
Observe abaixo todos os anos entre 1901 e 2000 que satisfazem as condições (II) e (III).

ano nasc.	18 anos
1902	1920
1913	1931
1924	1942
1935	1953
1946	1964
1957	1875
1968	1986
1979	1997

Basta agora escolher dentre estes números quais satisfazem às condições (I) e (IV). Como $19ab$ é divisível por 5, logo b é igual a zero ou 5. Logo 1935 é o ano de nascimento de Roberto.
Pelo enunciado $19dc$ é divisível por 8, onde $19dc$ é o ano em que Flávia fez 18 anos.
Logo, dentre os números da tabela, o único ano possível é 1920.

3. A escada rolante da rodoviária desce dois degraus a cada segundo. A sapeca Sandra subiu correndo a escada rolante de descida e, a seguir, desceu correndo a mesma escada rolante à mesma velocidade.
Seu amigo Pedro mediu o tempo no seu relógio e reparou que o tempo de descida de Sandra foi exatamente a metade do tempo de subida dela. Se para subir correndo a mesma escada rolante imóvel, à mesma velocidade, Sandra leva sete segundos, então quantos degraus tem a escada?

Resolução

Primeiramente definiremos a velocidade, v, como sendo o número de degraus que se percorre em um segundo.
Temos pela definição e pelo problema, que a velocidade da escada é

$$v = 2\frac{degraus}{seg} \text{ (I)}$$

Tomemos por v_s a velocidade de Sandra. Temos pela última frase do problema, tomando o número de degraus por x que,

$$v_s = \frac{x}{7}\frac{degraus}{seg}.$$

Chamando de t_1 o tempo de subida e de t_2 o tempo de descida

$$v_s - v = \frac{x}{t_1}\frac{degraus}{seg}$$
$$v_s + v = \frac{x}{t_2}\frac{degraus}{seg}$$

onde $v_s - v$ é a velocidade da garota subindo a escada e $v_s + v$ significa soma das velocidades pois ambas descem.
Da segunda frase temos,

$$t_2 = \frac{t_1}{2}$$

Vamos aos cálculos:

$$\begin{array}{ll} v_s - v = \frac{x}{t_1} & \qquad v_s + v = \frac{x}{t_2} \\ \frac{x}{7} - 2 = \frac{x}{t_1} & \qquad \frac{x}{7} + 2 = \frac{x}{\frac{t_1}{2}} \end{array}$$

Logo,

$$t_1 = \frac{7x}{x-14}$$
$$t_1 = \frac{28x}{x+14}$$

Assim,
$\frac{7x}{x-14} = \frac{14x}{x+14} \Rightarrow x^2 - 42x = 0 \Rightarrow x(x-42) = 0.$
Desta encontramos a solução $x = 42$ degraus.

4. Determine pelo menos dois triângulos retângulos escalenos cujas áreas são iguais a 2 cm^2 e que nenhum de seus lados tenha por medida 1 cm ou 4 cm.

Resolução

Temos que encontrar triângulos tais que $x \neq y$ e $x \times y = 4$ já que $\frac{x \times y}{2} = 2$.E, de acordo com o enunciado x e $y \neq 1$ e x e $y \neq 4$. Tomando $x = 3$ temos $y = \frac{4}{3}$ e com $x = 5$ encontramos $y = \frac{5}{3}$. Logo temos os pares $(3, \frac{4}{3})$ e $(5, \frac{5}{3})$. Satisfazendo as condições acima.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

5. Mostre que se n é par, então $(n^3 - n)$ é divisível por 6.
Mostre que se n é ímpar, então $(n^3 - n)$ é divisível por 24.

Resolução

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)n(n+1)$$
(produto de três inteiros consecutivos)

Dados três números consecutivos pelo menos um deles é par e um deles é múltiplo de três (Prove esta afiramção!).
Logo o número é múltiplo de 6, isto é, é divisível por 6. Veja que não foi preciso usar a hipótese de n ser par.

Vamos à segunda parte do problema.
Se n é impar $n-1$ e $n+1$ são pares e o produto é múltiplo de 4, assim como $n-1 = 2r$, $n = 2r+1$ e $n+1 = 2(r+1)$. Temos então,

$$(n-1)n(n+1) = 4r(r+1)(2r+1)$$

e ainda com r ou $r+1$ par podemos afirmar que $(n-1)n(n+2)$ é múltiplo de 3. Logo $(n-1)n(n+1)$ é múltiplo de 24.

6. Encontrar todos os números inteiros positivos x e y tais que $x^2 - y^2 = 215$

Resolução

Reescrevamos a expressão como segue,
$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ e $215 = 5 \times 43$. Logo,

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=43 \end{cases} \Rightarrow x = 24, y = -19;$$

$$\begin{cases} x+y=43 \\ x-y=5 \end{cases} \Rightarrow x = 24, y = 19;$$

$$\begin{cases} x+y=215 \\ x-y=1 \end{cases} \Rightarrow x = 108, y = 107;$$

ou $$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=215 \end{cases} \Rightarrow x = 108, y = -107.$$

Logo os valores inteiros positivos que satisfazem a igualdade são os pares x =24, y =19 e x =108, y =107.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

Resolução comentada da Prova da III Olimpíada/1994

1. Observe a tabela abaixo. Identifique nela a seqüência dos números naturais ordenados e responda:

1	2	3	4	
	8	7	6	5
9	10	11	12	
	16	15	14	13
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Em qual coluna estará localizado o número 50? E o número 1994? Justifique.

Resolução

Dado um nº os restos da divisão por 8 são: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Observando como foi construída a tabela dada e construindo outra tabela onde colocamos o resto da divisão do número por 8 temos,

1	2	3	4	
	0	7	6	5
1	2	3	4	
	0	7	6	5
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Para sabermos a posição de 50 e de 1994 vamos calcular o resto da divisão destes por 8,

$$50 = 8 \times 6 + 2$$

$$1994 = 8 \times 249 + 2.$$

Logo 50 e 1994 estão na 2°- coluna.

2. a)Encontre um número racional entre $\frac{8}{7}$ e $\frac{4}{3}$.
b)Dados dois números racionais $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ com $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, encontre um número racional entre $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$.
c)Sabendo que $\sqrt{2}$ é irracional, encontre um número irracional entre $\frac{8}{7}$ e $\frac{4}{3}$. (Sugestão:$\sqrt{2} = 1,41...$)

Resolução

a) Dados dois números racionais podemos determinar sua média aritmética, esta será um número entre outros dois. Logo,

$$M = \frac{\frac{8}{7} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{1}{2}(\frac{24+28}{21}) = \frac{52}{42} = \frac{26}{21}$$

b)$M = \frac{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}{2} = \frac{qm+np}{2nq}$. Observe pois que, a partir de $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ temos,

$$m = \frac{1}{2}(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}) > \frac{1}{2}(\frac{m}{n} + \frac{m}{n}) = \frac{m}{n} \Rightarrow m > \frac{m}{n}$$

$$m = \frac{1}{2}(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}) < \frac{1}{2}(\frac{p}{q} + \frac{p}{q}) = \frac{p}{q} \Rightarrow m < \frac{p}{q}$$

, logo,

$$\frac{m}{n} < m < \frac{p}{q}$$

c) Utilizemos a média aritmética,

$$\frac{8}{7} \simeq 1.14, \quad \frac{4}{3} \simeq 1.33, \quad \sqrt{2} \simeq 1.41$$

Determinemos a média aritmética entre $\frac{8}{7}$ e $\sqrt{2}$,

$$\frac{\frac{8}{7} + \sqrt{2}}{2} = \frac{8 + 7\sqrt{2}}{14} \simeq 1.27,$$

Sendo $\frac{8}{7} \simeq 1.14 < 1.27 < \frac{4}{3} \simeq 1.33$, temos que $\frac{8+7\sqrt{2}}{14}$ é um número irracional entre $\frac{8}{7}$ e $\frac{4}{3}$.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

3. a)Encontre todos os valores possíveis para q de modo que 1, q, $\frac{1}{q}$ sejam lados de um triângulo (Sujestão: três números positivos são medidas dos lados de um triângulo, se e somente se, o maior deles for menor que a soma dos outros dois).
b)Para quais valores de q o triângulo é retângulo?

Resolução

a)Se $q = 1$ os lados do triângulo são iguais a 1, e o triângulo é equilátero.
Se $q \neq 1$ os números 1, q e $\frac{1}{q}$ são diferentes e para serem lados de um trângulo devemos mostrar que o maior lado é menor que a soma dos outros lados.
Se $q > 1$ temos, $\frac{1}{q} < 1 < q \Rightarrow q < \frac{1}{q} + 1 \Rightarrow q^2 < 1 + q \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Como $q > 1$ temos que,

$$1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Se $q < 1$ temos $q < 1 < \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{q} < 1 + q \Rightarrow 1 < q + q^2 \Rightarrow q^2 + q - 1 > 0 \Rightarrow q < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} e q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Como $q < 1$ temos que,

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < 1.$$

Logo os possíveis valores de q pertencem ao intervalo

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

b)Note que $q \neq 1$. Se $q > 1$ então $\frac{1}{q} < 1 < q$. Logo $q^2 = \frac{1}{q} + 1 \Rightarrow q^4 = 1 + q^2 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
Se $q < 1$ então $q < 1 < \frac{1}{q}$. Logo $\frac{1}{q^2} = 1 + q^2 \Rightarrow q^4 + q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.
Portanto se $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}}$ o triângulo é retângulo.

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.

4. Sabe-se que se a, b e c são números inteiros com $a = b + 9 \times c$ então a é múltiplo de 9 se, e somente se, b o for.
a)Mostre que um número inteiro $a + 10 \times b + 100 \times c$ é múltiplo de 9 se, e somente se, $a + b + c$ também for. (Sugestão: $10 = 9 + 1$ e $100 = 99 + 1$).
b)Verifique que $751 - 517$ é múltiplo de 9.
c)Generalize: Prove que se d,e e f são obtidos permutando-se a, b e c, então $(9d + 10e + 100f) - (a + 10b + 100c)$ é divisível por 9.

Resolução

a) Devemos mostrar que $a+10b+100c$ é múltiplo de 9 se, e somente se, $a + b + c$ for também múltiplo de 9.
Temos que, $a + 10b + 100c = a + 9b + b + 99c + c$
$= a + b + c + 9b + 99c = a + b + c + 9(b + 11c)$.
Logo este número será múltiplo de 9 se, e somente se $a + b + c$ também o for.

b) Verifiquemos pois que $751 - 517$ é múltiplo de 9.
$751 - 517 = 234 = 9 \times 26$. Logo este número é múltiplo de 9.

c)Se d, e e f são obtidos por permutação de a, b e c temos então que $a + b + c = d + e + f$. Obtenhamos então a generalização.

$$
\begin{aligned}
&(d + 10e + 100f) - (a + 10b + 100c)\\
&= d + 9e + e + 99f + f - (a + 9b + b + 99c + c)\\
&= d + e + f + 9e + 99f - a - 9b - b - 99c - c\\
&= d + e + f - (a + b + c) + 99(f - c) + 9(e - b)\\
&= 99(f - c) - 9(e - b)\\
&= 9(11(f - c) + (e - b)).
\end{aligned}
$$

Logo este número, $fed - cba$ é múltiplo de 9.

5. Em um jogo de tabuleiro são permitidos apenas os seguintes movi-

mentos,

ou seja, só se pode movimentar para a direita ou pra baixo. Num tabuleiro 3×3, de quantas formas diferentes é possível sair do extremo superior esquerdo e chegar ao extremo inferior direito?

Resolução

Denotando por D um lance para direita e por B um lance para baixo, todo movimento possível será indicado por quatro letras, sendo duas delas B e duas delas D. Temos assim as seguintes possibilidades:

DDBB, DBDB, DBBD, BBDD, BDBD, BDDB

Portanto seis ao todo.

6. Considere duas circunferências tangentes C_1 e C_2 com raios R_1 e R_2, respectivamente, de modo que o ponto P_1 da primeira coincida com o ponto P_2 da segunda, conforme figura abaixo:

Suponhamos que ao girar uma delas, o sistema se movimente como peças de uma engrenagem com centros de C_1 e C_2 fixados.

a)Mostre que se $R_1 = \frac{2}{5}$ e $R_2 = \frac{7}{3}$ então, após um certo número de voltas, P_1 volta a tocar P_2.
b)Generalize: Prove que se $R_1 = \frac{m}{n}$ e $R_2 = \frac{p}{q}$ são racionais, então P_1 volta a tocar P_2.
c)O que ocorre se R_1 for racional e R_2 irracional? Justifique sua resposta.

Resolução

a) O que devemos fazer é encontrar o comprimento de cada circunferência e encontrar o número de vezes que esta tem que gira para coincidir P_1 e P_2.

$$l_{c_1} = 2\pi R_1 = 2\pi\frac{2}{5} = \frac{4}{5}\pi$$
$$l_{c_2} = 2\pi R_2 = 2\pi\frac{7}{3} = \frac{14}{3}\pi$$

.

Mostraremos que existem números m e n tais que $ml_{c_1} = nl_{c_2}$ assim

$$\frac{4\pi}{5}m = \frac{14\pi}{3}n \Rightarrow m = \frac{35}{6}n$$

Este resultado nos diz que quando a menor circunferência completar 35 voltas, a maior completará 6 voltas, e neste ponto P_1 e P_2 voltam a se encontrar.

b) Provar que se $R_1 = \frac{m}{n}$ e $R_2 = \frac{p}{q}$ são racionais, então P_1 volta a tocar P_2.

$$l_{c_1} = 2\pi R_1 = 2\pi\frac{m}{n}$$
$$l_{c_2} = 2\pi R_2 = 2\pi\frac{p}{q}.$$

Verifiquemos se existem α e β pertencentes aos racionais tal que, $\frac{\alpha 2\pi m}{n} = \frac{\beta 2\pi p}{q}$. Logo $\frac{\alpha m}{n} = \frac{\beta p}{q} \Rightarrow \alpha = \frac{np}{mq}\beta$;
para $\beta = mq \Rightarrow \alpha = \frac{np}{mq}mq = np$, logo existem α e β tal que os pontos P_1 e P_2 voltem a se encontrar.

c) Se R_1 for racional e R_2 for irracional vejamos o que acontece. Vejamos se existem α e β tais que para $l_{c_1} = 2\pi R_1$ e $l_{c_2} = 2\pi R_2$ tenhamos $\alpha 2\pi R_1 = \beta 2\pi R_2$;
$\alpha R_1 = \beta R_2 \Rightarrow R_1 = \frac{\beta R_2}{\alpha}$, para α e β pertencentes aos racionais.
Concluímos pois que a igualdade é falsa uma vez que R_1 é racional e R_2 é irracional.

Bibliografia

[1] HYGINO, H. D. et alli; *Fundamentos da Aritmética*, Editora Atual, São Paulo, 1991.
[2] GUSMÃO, Gisele de Araújo Prateado et alli; *Coletânea de Problemas*, Olimpiada de Matemática do Estado de Goiás. Goiânia, Goiás.
[3]BARBOSA, João Lucas Marques; *Geometria Euclidiana Plana*, SBM, 1997.

Heloísio Caetano Mendes
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Goiânia, GO, Brasil
heloisio@mat.ufg.br

Problemas Propostos

Caro leitor, estamos propondo alguns problemas para você tentar resolver. São problemas para os níveis 1, 2 e 3. As soluções serão publicadas no próximo número, e esperamos que a solução publicada seja a sua! Caso você consiga resolver qualquer um dos problemas mande para nós(não precisa ser a solução dos três). Ou ainda se você conhece algum problema interessante, envie-nos! Teremos prazer em receber. Este espaço também está aberto para receber suas sugestões, observações, críticas e perguntas. É só mandar sua cartinha(ou e-mail)!!!

Problemas desafios

Nível 1 (Problema 76 pag. 20,Solução pag. 158 [1])
Adicione aos dígitos 523... mais três dígitos de tal forma que o número resultante com seis dígitos seja divisível por 7,8 e 9.

Nível 2 (Problema 9 pag. 82, Solução pag. 163 [2])
Em uma ilha existem três tribos de nativos que fisicamente não tem nenhuma diferença, mas os "Limões" sempre dizem a verdade, os "Rochas" sempre mentem, e os "Laranjas" dizem alternadamente uma verdade e uma mentira, só que não se sabe por qual começam. Depois de presenciar uma corrida atlética com três participantes, dois nativos, cada um dos quais afirmava que o outro era Laranja, informavam a imprensa como segue: Nativo 1: o ganhador foi o n° 344, o segundo o n° 129, e o terceiro o n°210. Nativo 2: o ganhador foi o n°210, o segundo o n°344, e o terceiro é o n° 129. Qual era o número do ganhador?

Nível 3 (Problema n°3 pag. 132 [3])
Em cada casinha de um tabuleiro $n \times n$ há uma lâmpada. Ao ser tocada uma lâmpada muda seu estado e todas as lâmpadas situadas na mesma fila e na mesma coluna que ela determina (as lâmpadas que estão acesas se apagam e as que estão apagadas se acendem). Inicialmente todas as lâmpadas estão apagadas. Demonstrar que sempre é possível, com uma sucessão adequada de toques, que todas as lâmpadas do tabuleiro fiquem acesas, e encontrar em função de n, o número mínimo de toques para que se acendam todas as lâmpadas.

Sugestões

Nível 1

Para um número ser divisível por 7, 8 e 9 ele deve ser divisível por $7 \times 8 \times 9 = 504$

Nivel 2

Analise a quais tribos pertencem os Nativo 1 e o Nativo 2.

Nível 3

Considere o caso de n ser par e ímpar.

Bibliografia

[1] Shklarsky, D. O., Chentzov, N.N. e Yaglom,I.M.; *The URSS Olympiad problem book* , Dover Publications Inc., 1994.

[2] Losada, M.F.; *Problemas y Soluciones 1987 - 1991*, Olimpíadas Colombianas de Matemática, 1996.

[3] Wagner, E. e Moreira, C.G.T.; *10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática*, Organización de Estados Iberoamericanos, 1994.

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Coordenação de Olimpíada
CEP 74.001-970 Caixa Postal 131 - Goiânia - Go - Brasil
omeg@mat.ufg.br

Universidade Federal de Goiás

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás
Comissão Organizadora

Gisele de Araújo Prateado Gusmão (coordenadora), Jeblin Antônio Abraão, Luciana Maria Dias de Ávila, Rogerio Queiroz Chavez, Ronaldo Alves Garcia, Célia Guimarães (secretária), João Leonardo Muniz Rabêlo (bolsista).

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO
Correio eletrônico: omeg@mat.ufg.br Tel:(62)521-1208 Fax:(62)521-1180
Home-page: http://www.mat.ufg.br/eventos/olimpíadas/

Revista da Olimpíada, nº 2, 2001.