Nº 4
Abril/2003
ISSN 1518-6075

revista
DA OLIMPÍADA

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

Índice

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação(CIP)
(GPT/BC/UFG)

Revista da Olímpiada/Universidade Federal de Goiás/
Instituto de Matemática e Estatística.
N º 4 (jan./dez. 2003). Goiânia: Editora da UFG, 2003-v. Anual.
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Editoração	**Arte da Capa**
José H. da Cruz	Leonardo M. Pelá
Tiragem	**Postagem**
2.500 exemplares	1º semestre de 2003

Revista da Olimpíada, nº 4, 2003
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia
Caixa Postal 131
74.001-970 - Goiânia - Goiás
Tel.: (62) 521 1208, Fax: (62) 521 1180
site: www.mat.ufg.br

Universidade Federal de Goiás

Milca Severino Pereira
Reitora

Lázaro Eurípedes Xavier
Vice-Reitor

Celene Cunha Monteiro Antunes Barreira
Pró-Reitora de Graduação

Eliana Martins Lima
Pró-Reitora de Pesquisa e Graduação

Ilka Maria de Almeida Moreira
Pró-Reitora de Administração e Finanças

Emilson Rocha de Oliveira
Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional e Recursos Humanos

Ana Luiza Lima Sousa
Pró-Reitora de Extensão e Cultura

Ivete dos Santos Barreto
Pró-Reitora de Assuntos da Comunidade Universitária

Gisele de Araújo Prateado Gusmão
Diretora do Instituto de Matemática e Estatística

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás
Comissão Organizadora da XI OMEG
Ronaldo Alves Garcia (coordenador), Gisele de Araújo Prateado Gusmão, Oswaldo Scarpa M. Alves, Edméia Fernandes da Silva, Célia Guimarães (secretária) e Heloisio Caetano Mendes (bolsista).

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO
Correio eletrônico: omeg@mat.ufg.br Tel:(62)521-1208 Fax:(62)521-1180
Site: www.mat.ufg.br/extensao/olimpiada
e-mail: omeg@mat.ufg.br}

Apresentação

Caro Leitor,

A *R*evista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e alunos do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática*.

Convidamos o leitor que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado aos seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação, ver endereço a 1ª contra capa.

Lembramos que devemos estar sempre atentos para o fato de que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade.

Esperamos que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, abril de 2003.

Os Editores.

Índice

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 4, 2003, 1-20

Coletâneas de Problemas e Resoluções

Coletânea de Problemas, nível 1

Problema 1. Um número natural é menor que o dobro de outro, e este é menor que o triplo de um terceiro. Se esse terceiro é menor que 100, qual é o maior valor possível do primeiro número?

Problema 2. Durante uma aula, perguntado sobre o dia de seu aniversário, o professor de Matemática disse:

-O dia em que nasci é um número primo maior do que o quadrado e menor que o cubo do mês em que nasci. A soma do dia com o mês também dá um número primo, mas a diferença não. Em que dia ele faz aniversário?

Problema 3. Em 1988, o feriado de 7 de setembro caiu em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o aniversário da Independência do Brasil no ano 2007?

Problema 4. Qual é o menor número natural que dividido por 2 dá resto 1, dividido por 3 dá resto 2, dividido por 4 dá resto 3 e dividido por 5 dá resto 4?

Problema 5. Em 1938, uma moça tinha tantos anos quantos expressavam os dois últimos algarismos do ano em que nascera. Ao contar isso a sua avó, ambas espantaram-se ao perceberem que o mesmo ocorria à velha senhora. Quantos anos tinha cada uma?

Problema 6. Um quadrado, de $1\,m$ de lado, está dividido em quadradinhos de 1 milímetro de lado. Se colocássemos todos os quadradinhos em fila, um colado no outro, qual a medida desta fila?

Problema 7. Uma parede quadrada, medindo $3\,m$ por $3\,m$, vai ser toda coberta com azulejos quadrados de $20\,cm$ de lado. Alguns azulejos são brancos e outros são azuis. Quantos azulejos brancos serão necessários se:

a) As diagonais forem cobertas com azulejos azuis?

b) Os azulejos forem assentados de modo que não haja dois azulejos vizinhos com a mesma cor?

Problema 8. Alfredo, Bebeto e Carlos percorrem a distância de 100 metros, em tempos diferentes, porém com velocidades constantes.

Alfredo e Bebeto percorrem essa distância em tempos iguais, se Bebeto sair 20 metros à frente de Alfredo.

Alfredo e Carlos cruzam a linha de chegada juntos, se Alfredo sair 25 metros à frente de Carlos.

A que distância um do outro devem partir Bebeto e Carlos para chegarem juntos?

Problema 9. Um cavalo e um burro caminhavam juntos, levando sobre os lombos pesadas cargas. Lamentava-se o cavalo de seu revoltante fardo, quando o burro lhe disse:

"- De que te queixas? Se eu tomasse um saco dos teus, minha carga passaria a ser o dobro da tua. Por outro lado, se eu te desse um dos meus sacos, tua carga se igualaria à minha!" Quantos sacos levava cada um dos dois animais?

Problema 10. Que frações devem ser retiradas da soma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}$$

para que a soma das restantes seja igual a 1?

Problema 11. Existem casas em volta de uma praça. João e Pedro dão uma volta na praça, caminhando no mesmo sentido e contando as casas. Como não começaram a contar da mesma casa, a 5^a casa de João é a 12^a de Pedro e a 5^a casa de Pedro é a 30^a de João. Quantas casas existem em volta da praça?

Problema 12. Se a metade de cinco fosse nove, quanto seria a terça parte de dez?

Problema 13. Pouco se sabe sobre a biografia de Diofanto, que foi um notável matemático da Antigüidade. Tudo o que se conhece a respeito dele foi extraído de sua sepultura, onde havia uma inscrição composta sob a forma de um exercício matemático. Leia-o e descubra a idade que ele tinha quando morreu.

"Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofanto. E os números podem, ó milagre!, revelar quão dilatada foi sua vida, cuja sexta parte constitui sua linda infância. Transcorrera $\frac{1}{12}$ de sua vida, quando seu queixo se cobriu de penugem. A sétima parte de sua existência, transcorreu num matrimônio estéril. Passado um qüinqüênio, fê-lo feliz o nascimento de seu precioso primogênito, o qual entregou seu corpo, sua formosa existência, que durou apenas a metade da de seu pai, à Terra. E com dor profunda desceu à sepultura, tendo sobrevivido quatro anos ao falecimento de seu filho."

Problema 14. Escrevendo todos os números inteiros de 100 a 999, quantas vezes escrevemos o algarismo 5?

Problema 15. Determinar como 1000 moedas de 1 dinar foram distribuídas em 10 caixas do mesmo tamanho, numeradas e fechadas, de maneira que:

a)A numeração das caixas, de 1 até 10, foi feita em ordem estritamente crescente, relativa ao conteúdo de moedas que cada uma encerra.

b)É possível fazer qualquer pagamento, de 1 a 1000 dinares, sem precisar abrir as caixas.

Resolução da Coletânea, nível 1

Solução. 1 Cuidado! Trata-se de números naturais.

O terceiro número é menor que 100; logo, no máximo é 99.

O triplo do terceiro é, então, no máximo, $3 \times 99 = 297$.

O segundo número é menor que 297; logo, é no máximo 296.

O dobro do segundo número é, então, no máximo, $2 \times 296 = 592$.

O primeiro número é menor que 592; logo é no máximo 591.

Solução. 2 As condições enunciadas para achar o dia e o mês são 5:

(1) O dia é número primo.

(2) dia > $(\text{mês})^2$.

(3) dia < $(\text{mês})^3$.

(4) (dia + mês) é número primo.

(5) (dia - mês) não é número primo.

Para satisfazer às condições 1, 2 e 3, os dias possíveis são:

Fevereiro - $2^2 <$ dia primo $< 2^3$ - 5/2 e 7/2

Março - $3^2 <$ dia primo $< 3^3$ - 11/3, 13/3, 17/3, 19/3 e 23/3

Abril - $4^2 <$ dia primo $< 4^3$ - 17/4, 19/4, 23/4 e 29/4

Maio - $5^2 <$ dia primo $< 5^3$ - 29/5 e 31/5

Janeiro fica eliminado pela condição 3 e os demais meses pela condição 2. A condição 4 elimina: 7/2, todos os dias de março, 17/4, 23/4, 29/4 e os dias de maio. Ficamos com apenas duas datas : 5/2 e 19/4. A condição 5 elimina 5/2.

Logo, o aniversário do professor é no dia 19 de abril.

Solução. 3 O ano de 1988 foi bissexto. De 7/09/1988 a 7/09/2007 irão passar 19 anos. Desses 19 anos, 4 serão bissextos (com 366 dias) e 15 serão normais (com 365 dias). Irão passar, portanto, $4 \times 366 + 15 \times 365 = 6939$ dias, isto representa 991 semanas inteiras mais 2 dias. Logo 7/09/2007 será uma sexta-feira (quarta-feira mais dois dias). Leia sobre ano bissexto na Revista do Professor de Matemática nº20 [06].

Solução. 4 Adicionando 1 ao número procurado, ficamos com um número divisível por 2, por 3, por 4 e por 5. Como o número pedido é o menor nas condições dadas, ficamos com o $mmc(2, 3, 4, 5)$, que é 60. Logo, o número procurado é 59.

Solução. 5 Vamos representar por $19ab$ o ano em que a moça nasceu e por $18cd$ o ano em que a avó nasceu. $1938-19ab = ab \Rightarrow 38-ab = ab \Rightarrow 38 = 2ab$ Logo $ab = 19$. No caso da avó temos, $1938 - 18cd = cd \Rightarrow 138 - cd = cd \Rightarrow 138 = 2cd$. Logo $cd = 69$. Assim a moça tinha 19 anos e sua avó 69.

Solução. 6 O quadrado tem $1\,000\,mm$ de lado. O quadrado pode ser dividido em $1\,000\,mm \times 1\,000\,mm$, ou seja, $1\,000\,000\,mm^2$. Logo, o quadrado é dividido em 1 000 000 de quadradinhos.

Colocando 1 000 000 de quadradinhos em fila, um ao lado do outro, a fila teria $1\,000\,000\,mm$, ou seja, $1\,000\,m$ ou, ainda, $1\,km$.

Solução. 7 A parede tem $9\,m^2$ e cada azulejo tem $0,04\,cm^2$; então, serão assentados $9 \div 0,04 = 225$ azulejos em 15 filas horizontais e 15 colunas verticais.

a) Em cada diagonal serão colocados 15 azulejos azuis, mas o total de azulejos azuis nas diagonais é 29, porque um deles é comum às duas diagonais. Dessa forma, o total de azulejos brancos é menor ou igual a $225 - 29 = 196$.

b) Nesse caso, tudo depende da cor dos azulejos usados nos cantos da parede. Se eles forem brancos, haverá 8 filas horizontais com 8 azulejos brancos e 7 com 7 azulejos brancos; o total de azulejos brancos será, então, $64 + 49 = 113$. Se eles forem azuis, o total de azulejos azuis será 113 e, em conseqüência, os azulejos brancos serão 112.

Solução. 8 Alfredo percorre $100m$ no mesmo tempo em que Bebeto percorre $80m$. Equivale dizer que Alfredo percorre $75m$ no mesmo tempo em que Bebeto percorre $60m$. Por outro lado, Alfredo percorre $75m$ no mesmo tempo em que Carlos percorre $100m$. Temos, então, que Alfredo, Bebeto e Carlos percorrem $75m, 60m$ e $100m$ no mesmo intervalo de tempo. Logo, Bebeto deverá sair $40m$ à frente de Carlos.

Solução. 9 Seja x o número de sacos que o burro levava e y o número de sacos que o cavalo levava.

"Se eu tomasse um saco dos teus..."

$$\text{burro: } x+1$$
$$\text{cavalo: } y-1$$

"minha carga passaria a ser o dobro da tua."

$$x + 1 = 2(y - 1). \tag{1.1}$$

"Por outro lado, se eu te desse um de meus sacos..."

$$\text{burro: } x-1$$
$$\text{cavalo: } y+1$$

" ...tua carga se igualaria à minha!"

$$x - 1 = y + 1. \tag{1.2}$$

De (1.1) e (1.2) resulta: $x = 7$ e $y = 5$.

Portanto, o burro levava 7 sacos e o cavalo 5 sacos.

Solução. 10

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{60 + 30 + 20 + 15 + 12 + 10}{120}.$$

Sendo $60 + 30 + 20 + 10 = 120$, basta excluirmos 15 e 12 da soma, ou seja, excluiremos as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$ para que o resultado seja $\frac{120}{120} = 1$.

Solução. 11 Sejam J_n e P_n respectivamente as n-ésimas casas de João e Pedro. De J_5 a J_{30} exclusive, existem $30-5-1=24$ casas. De P_5 a P_{12} exclusive, existem $12-5-1=6$. Logo, no total existem $24+6+2=32$ casas.

Solução. 12 Se a metade de cinco fosse nove, a metade de dez seria dezoito e dez inteiro valeria trinta e seis. Portanto, a terça parte de dez seria doze.

Solução. 13 Interpretando o problema, montamos a seguinte equação:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4,$$

o que nos dá $x = 84$. Logo, Diofanto morreu com 84 anos.

Solução. 14 Na casa das unidades o algarismo 5 aparecerá 90 vezes, pois teremos 9 opções na casa das centenas e 10 opções na casa das dezenas. Também na casa das dezenas o algarismo 5 aparecerá 90 vezes, já na casa das centenas ele aparecerá 100 vezes, totalizando 280 aparições do algarismo 5, de 100 a 999.

Solução. 15 A primeira caixa deve conter uma moeda, pois caso contrário não poderíamos fazer um pagamento de um dinar. A segunda caixa deve conter duas moedas pois, se tivesse três, quatro ou mais dinares, não seria possível fazer um pagamento de dois dinares.

A caixa número 3 deve ter quatro moedas, pois o conteúdo das duas primeiras caixas já permite fazer pagamentos de 1, 2 e 3 dinares.Devemos continuar o raciocínio até estabelecermos a seguinte distribuição das moedas nas caixas numeradas de 1 a 9: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 256. Quanto à décima caixa, concluimos que deve conter

$$1\,000 - (2^8 + 2^7 + \ldots + 2^1 + 2^0) = 489 \text{ moedas.}$$

Uma justificativa da solução pode ser fornecida utilizando-se a notação binária (base 2) para representar os números.

Por exemplo, para fazer um pagamento de 352 (notação decimal) dinares observamos que:

$$352 = 1 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.$$

Logo, na base 2, o número 352 se escreve 101100000, o que significa que escolhemos as caixas de números 9, 7 e 6.

E assim procede-se com as demais possibilidades.

Coletânea de Problemas, nível 2

Problema 1. Três mulheres estão na fila da padaria, a primeira compra 5 pãezinhos, 2 litros de leite e um pacote de pó de café gastando R$ 6,20. A segunda gasta R$ 9,80 para comprar 6 pãezinhos, 2 litros de leite e 2 pacotes de pó de café. Quanto a terceira mulher gastou para comprar 8 pãezinhos, 3 litros de leite e 2 pacotes de pó de café?

Problema 2. Fernando viaja por uma estrada com velocidade constante. Num determinado instante passa por um marco que contém dois algarismos. Uma hora depois passa por outro marco que contém dois algarismos, mas em ordem invertida. Uma hora depois passa por um terceiro marco que contém os mesmos 2 algarismos, separados por um zero. A que velocidade Fernando viaja?

Problema 3. Três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto, possuem exatamente quatro domingos cada um. Prove que um destes meses é fevereiro.

Problema 4. Utilizando apenas uma régua (sem escala) que permite traçar paralelas, determinar o ponto médio de um segmento dado. Justificar.

Problema 5. Um terreno deve ser dividido em lotes iguais, por certo número de herdeiros. Se houvesse três herdeiros a mais, cada lote diminuiria de $20m^2$; e se houvesse quatro herdeiros a menos, cada lote aumentaria de $50m^2$. Qual a área do terreno?

Problema 6. Ao escrever os números naturais 1, 2, 3,..., n um estudante escreveu 1 002 dígitos. Qual o valor de n?

Problema 7. a)Dada uma equação do segundo grau, com coeficientes inteiros, mostre que o seu discriminante não pode ser igual a 23.

b)Para quantos valores reais do número a a equação $x^2+ax+6a=0$ possui somente raízes inteiras?

Problema 8. No retângulo ABCD, M, N, P e Q são pontos médios dos lados AB, BC, CD e AD, respectivamente, O é o centro do retângulo ABCD e T a interseção de BP e NQ. Se a área do triângulo BOT é 1, calcular a área do retângulo ABCD.

Problema 9. Seja PQRST um pentágono inscrito numa circunferência de centro O, onde $P\hat{O}Q = 70^o$. Sendo x e y as medidas dos ângulos $P\hat{T}S$ e $S\hat{R}Q$, quanto vale $x + y$?

Problema 10. Os lados de um retângulo são números inteiros. Quais os comprimentos dos lados do retângulo de modo que o valor de seu perímetro seja igual ao valor de sua área?

Problema 11. Deseja-se descobrir quantos degraus são visíveis numa escada rolante. Para isso foi feito o seguinte: duas pessoas começaram a subir a escada juntas, na mesma velocidade, uma subindo um degrau de cada vez enquanto que a outra subia dois. Ao chegar ao topo, o primeiro contou 21 degraus enquanto o outro 28. Com esses dados foi possível responder a questão. Quantos degraus são visíveis nessa escada rolante? (obs.: A escada está andando.)

Problema 12. Uma usina compra 2 000 litros de leite para ser beneficiado. A fim de aumentar seus lucros, retira certo volume V de leite para a produção de iogurte e o substitui por água. Em seguida, retira novamente o mesmo volume V da mistura e o substitui por água. A fiscalização examina a mistura final e verifica que nela existem apenas 1125 litros de leite puro. Qual é o volume V?

Problema 13. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos dá o quadrado da soma deles. Quais são esses inteiros?

Problema 14. Dois irmãos, Pedro e João, decidiram brincar de pega-pega. Como Pedro é mais velho, enquanto João dá 6 passos, Pedro dá apenas 5. No entanto, 2 passos de Pedro equivalem à distância que João percorre com 3 passos.

Para começar a brincadeira, João dá 60 passos antes de Pedro começar a perseguí-lo. Depois de quantos passos Pedro alcança João?

Problema 15. O quadrado ABCD tem lado 1.

Prolongamos o lado BC até um ponto P à distância x de C, conforme a figura. Para que valores de x a área da parte do triângulo ABP que fica fora do quadrado supera a que fica dentro?

Resolução da Coletânea, nível 2

Solução. 1 Seja P o preço do pão, L o do leite e C o do café, sabemos que:

$$5P + 2L + C = 6,20 \qquad \text{e} \qquad 6P + 2L + 2C = 9,80.$$

Queremos saber o valor de $8P + 3L + 2C$. Para isto devemos procurar dois números α e β tais que:

$$\alpha(5P + 2L + C) + \beta(6P + 2L + 2C) = 8P + 3L + 2C. \tag{1.3}$$

Logo,

$$5\alpha P + 6\beta P = 8P, \tag{1.4}$$

$$2\alpha L + 2\beta L = 3L, \tag{1.5}$$

$$\alpha C + 2\beta C = 2C. \tag{1.6}$$

De (1.5) e (1.6) encontramos α=1 e β=$\frac{1}{2}$
Substituindo em (1.3), temos:

$$\begin{aligned} 1(5P + 2L + C) + \frac{1}{2}(6P + 2L + 2C) &= 8P + 3L + 2C, \\ 1(6,20) + \frac{1}{2}(9,80) &= 8P + 3L + 2C, \\ 11,10 &= 8P + 3L + 2C. \end{aligned}$$

Logo, a terceira mulher gastou R\$$11,10$.

Solução. 2 Suponha que o primeiro marco indica ab, que corresponde a $10a + b$ quilômetros. O segundo marco registra, portanto, ba, que corresponde a $10b + a$. No terceiro marco o número pode ser escrito como $100a + b$ ou $100b + a$. Sendo a velocidade, constante, a distância percorrida entre o segundo e o terceiro marcos é igual à percorrida entre o primeiro e o segundo. Esta última é inferior a 100, portanto o algarismo das centenas no terceiro marco é 1. Como b não pode ser igual a 1, segue que a é igual a 1. Logo, escrevendo a equação:

$$\text{n}^\text{o} \text{ do } 2^\text{o} \text{ marco - n}^\text{o} \text{ do } 1^\text{o} \text{ marco} = \text{n}^\text{o} \text{ do } 3^\text{o} \text{ marco - n}^\text{o} \text{ do } 2^\text{o} \text{ marco.}$$

Ou

$$(10b+1)-(10+b)=(100+b)-(10b+1) \Longrightarrow 18b=108 \Longrightarrow b=6.$$

Assim concluímos que os marcos são: 16, 61 e 106 quilômetros e a velocidade é 45 Km/h.

Solução. 3 Se nenhum destes meses for fevereiro, o número total de dias não pode ser menor que $91 = 7 \times 13$ e portanto o número total de domingos não poderia ser menor do que 13.

Solução. 4 Dado um segmento $\overline{AB}$ traçamos uma paralela r ao segmento $\overline{AB}$ e duas retas AP e BP, que cortam r em C e D, respectivamente. Construímos as retas AD e BC que se cortam em E. A reta PE corta o segmento $\overline{CD}$ no ponto N e o segmento $\overline{AB}$ no seu ponto médio M. Vamos agora justificar esta construção.

Como $\overline{AB}//r$, temos,

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{ND}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{CN}+\overline{ND}}{\overline{AM}+\overline{MB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$$

e

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{ND}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{CN}+\overline{ND}}{\overline{AM}+\overline{MB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

Logo $\overline{AM}=\overline{MB}$.

Observação: Nos problemas clássicos de geometria euclidiana a única função de uma régua é construir uma reta ligando dois pontos dados. Nesse problema, em que a régua tem dois lados paralelos, permitimos apenas mais de uma função, que é a de traçar retas paralelas usando-se os dois lados paralelos da régua dada.

Solução. 5 Consideremos os conjuntos:

T: a área do terreno em m^2 $(T>0)$,

E: o número de herdeiros $(E>4)$ e

L: a área do lote em m^2 $(L>20)$.

Das condições do problema,temos:

$$\frac{T}{E}=L; \qquad \frac{T}{E+3}=L-20; \qquad \frac{T}{E-4}=L+50.$$

Resolvendo o sistema, chegamos a $T=1\,200m^2$.

Solução. 6 Afirmamos que n deve ter no máximo 4 dígitos. De fato, se n tivesse mais de 4 dígitos, o número total de dígitos, que seriam escrito, é maior ou igual ao número de dígitos usados para escrever

$$1, 2, .., 9, 10, ..., 99, 100, ..., 999, 1\,000, ..., 9\,999, 10\,000$$

que é $9 \times 1 + 90 \times 2 + 900 \times 3 + 9\,000 \times 4 + 5 = 38\,894 > 1\,002$. Portanto, n tem 4 ou menos dígitos. Suponhamos que n tenha 4 dígitos. A equação a ser resolvida é $9 \times 1 + 90 \times 2 + 900 \times 3 + (n - 99) \times 4 = 1\,002$, que não tem solução para n natural. Supondo que n tenha 3 dígitos encontramos a solução $n = 370$.

Solução. 7 (a) Seja $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c inteiros e $a \neq 0$. Suponhamos, por contradição, que $b^2 - 4ac = 23$. Segue que $b^2 = 4ac + 23$ é ímpar e portanto b é ímpar. Se b é ímpar, $b - 1$ e $b + 1$ são pares, logo $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$ é múltiplo de 4 o que é uma contradição pois $b^2 - 1 = 4ac + 22 = 4(ac + 5) + 2$. Portanto $b^2 - 4ac$ é diferente de 23.

(b) É claro que a deve ser inteiro, uma vez que a soma das raízes é $-a$. E $a^2 - 24a$ deve ser o quadrado de um número inteiro. Suponha $a^2 - 24a = n^2$, com n inteiro. Como $a^2 - 24a = (a - 12)^2 - 144$, temos $(a - 12)^2 = 12^2 + n^2$. Essa equação admite a solução trivial $n = 0$ e, nesse caso, $a = 0$ ou $a = 24$. Se n é diferente de zero, n e 12 podem ser pensados como os catetos de um triângulo cuja hipotenusa é $(a - 12)$. Sabemos que existem 4 triângulos retângulos com lados inteiros e com um cateto igual a 12, a saber, $(5, 12, 13), (9, 12, 15), (12, 16, 20)$ e $(12, 35, 37)$. Fazendo n igual a 5, 9, 16 e 35 obtemos 8 valores para a. Portanto para 10 valores de a a equação $x^2 + ax + 6a = 0$ possui somente raízes inteiras.

Solução. 8 Sejam O o centro do retângulo e T a inteseção de $\overline{ON}$ com $\overline{BP}$. Os triângulos ΔOTP e ΔOTB são de áreas iguais, pois têm a mesma base e igual altura. Temos que os triângulos ΔOTP e ΔNTB são congruentes, sendo ambos de área 1. Então, a área do ΔOBN é 2 e, como é a metade da área de $ONBM$, a área de $ABCD$ é 16.

Solução. 9 Tanto $P\hat{T}S$ quanto $S\hat{R}Q$ são ângulos inscritos na circunferência de modo que, pelo teorema do ângulo inscrito, temos: $x = \frac{1}{2}\text{arco}(SRP)$ e

$$y = \frac{1}{2}\text{arco}(QPS).$$

Como arco(SRP) =arco$(SRQ) + 70^o$, segue que

$$\begin{aligned}
x + y &= \frac{1}{2}\text{arco}(SRP) + \frac{1}{2}\text{arco}(QPS)\\
&= \frac{1}{2}[\text{arco}(SRQ) + 70^o] + \frac{1}{2}\text{arco}(QPS)\\
&= 35^o + \frac{1}{2}[\text{arco}(SRQ) + \text{arco}(QPS)]\\
&= 35^o + \frac{1}{2} \cdot 360^o = 35^o + 180^o = 215^o.
\end{aligned}$$

Solução. 10 Sendo x e y os lados do retângulo, temos a equação:

$$2x + 2y = xy \Rightarrow x = \frac{2y}{y-2}. \tag{1.7}$$

Como x e y devem ser números inteiros positivos, então $y - 2 > 0$, ou seja, $y > 2$. Podemos reescrever a expressão (1.7):

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}.$$

Como x tem que ser um número inteiro, $\dfrac{4}{y-2}$ também será. Mas $y > 2$, assim y pode assumir os valores $3, 4$ ou 6; que corresponderão aos valores de $x : 6, 4$ ou 3.

Solução. 11 Para facilitar, vamos dar nome às pessoas: GUSTAVO sobe dois degraus por vez e MARCOS sobe um degrau por vez. Conforme diz o enunciado, quando Gustavo chegou ao topo, ele contou 28 degraus. Como ele anda dois por vez, na verdade o Gustavo deu 14 passos. Então, quando ele chegou no topo, o Marcos havia andado 14 degraus, pois ele anda um por vez. Como a escada está andando, ao mesmo tempo que Gustavo andou 28 e Marcos andou 14, a escada andou sozinha x degraus. O enunciado diz que quando Marcos chegou ao topo ele contou 21 degraus. Como ele está no 14, ainda faltam 7 para que chegue ao topo (ou seja, falta metade do que já andou). Portanto, durante estes 7 que faltam, a escada andará sozinha mais $\dfrac{x}{2}$ degraus. Feito! O número de degraus visíveis para o Gustavo e para o Marcos deve ser o mesmo.

Então basta montar a equação:

$$28 + x = (14 + x) + (7 + \frac{x}{2}),$$

cuja solução é $x = 14$ Como Gustavo andou $28 + x$ degraus, temos que 42 é o número de degraus visíveis.

Solução. 12 Após a primeira troca de V litros de leite por água, a mistura fica com V litros de água e $(2000 - V)$ litros de leite. A fração de leite nessa mistura é $\frac{2000 - V}{2000}$. Ao retirar V litros da mistura, a quantidade de leite retirada é $\frac{2000 - V}{2000}V$. A quantidade total de leite retirado nas duas operações é, então, $V + \frac{2000 - V}{2000}V$. Como sobraram 1125 litros de leite puro, foram retirados $2000 - 1125$, logo 875 litros.

Temos então que,

$$V + \frac{2000 - V}{2000}V = 875 \quad \Rightarrow \quad V = 500.$$

Solução. 13 Sejam $n - 1$, n e $n + 1$ números inteiros consecutivos. Como $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = (3n)^2 \Rightarrow n(n^2 - 3n + 2) = 0 \Rightarrow n = 0$ ou $n = 1$ ou $n = 2$. Portanto os números são $-1, 0, 1$ ou $0, 1, 2$ ou $1, 2, 3$.

Solução. 14 A distância de 60 passos que João andou antes de começar a brincadeira corresponde a 40 passos de Pedro. Enquanto Pedro dá 5 passos, João dá 6 passos. Assim, a cada 5 passos que Pedro dá, ele se aproxima 1 passo de João. Para alcançar João, Pedro deverá se aproximar 40 passos, o que ocorrerá quando ele tiver dado $40.5 = 200$ passos.

Solução. 15 Temos que, $\frac{y}{1} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow y = \frac{x}{x+1}$. A área do triângulo fora do quadrado é

$$\frac{y \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2(x+1)}.$$

A área dentro do triângulo é

$$\frac{(1 + y) \cdot 1}{2} = \frac{1 + \frac{x}{x+1}}{2} = \frac{2x + 1}{2(x+1)}.$$

Como $x > 0$, a área de fora supera a de dentro se $x^2 > 2x + 1$. Então, $x > 1 + \sqrt{2}$.

Coletânea de Problemas, nível 3

Problema 1. Mostre que o número de soluções de

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2003}$$

com x, y, z naturais é finito.

Problema 2. As construções com régua e compasso já aparecem no século V a.C., época dos pitagóricos, e tiveram enorme importância no desenvolvimento da Matemática grega. Na Grécia antiga, a palavra número era usada só para os inteiros e uma fração era considerada apenas uma razão entre números. Estes conceitos causavam dificuldade nas medidas das grandezas. A noção de número real estava ainda muito longe de ser concebida, mas, na época de Euclides (século III a.C.) uma idéia nova apareceu. As grandezas, no lugar de serem associadas a números, passaram a ser associadas a segmentos de reta. Assim o conjunto de números continuava discreto e o das grandezas contínuas passou a ser tratado por métodos geométricos. Nasce então uma nova álgebra, completamente geométrica onde a palavra resolver era sinônimo de construir.[7]

Dados os segmentos de comprimentos a e b construa geometricamente as soluções da equação $x^2 - ax + b^2 = 0$.

Problema 3. Um triângulo ABC tem base $\overline{AB}$ fixa sobre a reta r. E o vértice C desloca-se ao longo de uma reta s, paralela a r e a uma distância h de r. Determine a curva descrita pelo ponto de encontro das alturas do triângulo ABC, quando C percorre s.

Problema 4. Sendo n um inteiro maior que 1. Mostre que $4^n + n^4$ não é primo.

Problema 5. Determine o termo geral da seqüência $x_{n+1} = ax_n + b$

Problema 6. Mostre que a seqüência do números primos é infinita.

Problema 7. Em um cubo de aresta 2 distribuímos 9 pontos. Mostre que existem pelo menos 2 pontos que se encontram a uma distância menor ou igual a $\sqrt{3}$.

Problema 8. Mostre que se um triângulo possui duas medianas iguais, então ele é isósceles.

Problema 9. Camila possui R$ 500,00 depositados num banco. Duas operações bancárias são permitidas, retirar 300 e depositar 198. Essas operações podem ser repetidas quantas vezes Camila desejar, mas somente o dinheiro inicialmente depositado pode ser usado. Qual o maior valor que Camila pode retirar do banco? Como pode fazê-lo?

Problema 10. Uma função $F\colon A \to B$ é dita uma isometria se ela preserva distâncias, isto é,

$$d(F(x), F(y)) = d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in A$$

onde $d(x, y)$ denota a distância entre x e y.

Encontre todas as funções $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são isometrias.

Problema 11. Em um triângulo ABC, $3 \operatorname{sen} A + 4 \cos B = 6$ e $4 \operatorname{sen} B + 3 \cos A = 1$. Qual o valor do ângulo C em graus?

Problema 12. Prove que 999 919 e 1 000 343 são primos.

Problema 13. Um quadrado mágico de ordem n é uma matriz $n \times n$, cujos lados são os inteiros $1, 2, 3, ..., n^2$ sem repetir nenhum, tal que todas as linhas e todas as colunas têm a mesma soma. O valor dessa soma é chamada constante mágica. Por exemplo, os quadrados

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

são mágicas, com constantes mágicas iguais a 15, 15 e 65 respectivamente. Aliás, os dois últimos são hipermágicos, pois as linhas, colunas e também as diagonais têm a mesma soma. Calcule a constante mágica de um quadrado mágico de ordem n.

Problema 14. Mostre que nenhum número inteiro da forma $1 + 4^n$ é divisível por 3.

p14 Mostre que se n e p são naturais e $n \geq 2$ é par os valores de $\binom{n}{p}$ para $p = 0, 1, 2, 3, ..., n-1, n$ são crescentes até atingir um valor máximo para $p = \frac{n}{2}$, depois decrescem até p atingir o valor n.

Problema 15. Determine os quatro últimos dígitos do número 9^{2003}.

Resolução da Coletânea, nível 3

Solução. 1 Suponha $x \leq y \leq z$ temos que $x \leq 3 \times 2003$, pois do contrário, $z \geq y \geq x > 3 \times 2003 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{2003}$, o que não pode. Então

$$0 \leq x \leq 3 \times 2003,$$

isto é, existem finitos valores para x.

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2003} - \frac{1}{x} = a.$$

Temos que $y \leq 2a$ pois do contrário,

$$z \geq y > 2a \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$$

Então $0 \leq y \leq 2a$ isto é, existem finitos valores para y. Fixados x e y temos

$$z = \left(\frac{1}{2003} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^{-1}.$$

Como temos finitos valores para x e y, também temos finitos valores para z.

Solução. 2 Resolvendo algebricamente a equação dada obtemos $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$.

Se $a > 2b$ temos que $a^2 - (2b)^2$ é positivo e teremos duas raízes distintas. Determinando as soluções x_1 e x_2 da equação, tais que, $x_1 + x_2 = a$ e $x_1 x_2 = b^2$. Vamos construir as raízes x_1 e x_2.

Considere o semi-círculo de diâmetro $PQ = a$. Trace uma paralela a esse diâmetro de altura b, essa reta corta o semi-círculo pois $\frac{a}{2} > b$. Seja R essa intersecção, projete R sobre PQ obtendo o ponto X, assim $XR = b$ agora basta fazer $x_1 = PX$ e $x_2 = XQ$. Assim $x_1 + x_2 = a$ e $x_1 x_2 = b^2$. Esta última equação é obtida do triângulo retângulo PRQ.

Se $a = 2b$ obtemos uma única solução que é $x = \frac{a}{2}$. Seja AB um segmento de comprimento a. Obtemos $\frac{a}{2}$ construindo a mediatriz do segmento AB, para isto traçamos dois círculos de mesmo raio, o raio deve ser maior que a metade do segmento para obtermos o encontro dos dois círculos, com centros em A e B. Sejam P e Q os pontos de intersecção desses círculos. A intersecção da reta PQ com o segmento

AB determina o ponto médio do segmento C, pois sendo $APBQ$ um losango, suas diagonais são perpendiculares e cortam-se ao meio. Assim basta tomar $x = AC$.

Se $a < 2b$ o radical $\sqrt{a^2 - 4b^2}$ não tem solução real, logo não é possível construir uma solução para a equação dada.

Solução. 3 A reta que contém a altura relativa a $\overline{AB}$ é $x = x_0$ e a reta $\vec{AC}$ tem coeficiente angular $\frac{h}{x_0}$.

A reta que contém a altura relativa a $\vec{AC}$ tem equação

$$y = -\frac{x_0}{h}(x - b).$$

Basta então resolver o sistema (achar a intersecção de:)

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = -\frac{x_0}{h}(x - b) \end{cases}$$

Temos então $y = -\frac{x}{h}(x - b) = \frac{xb}{h} - \frac{x^2}{h}$, que é uma parábola.

Solução. 4 Sabemos que

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Se n é par então $4^n + n^4$ é par maior que 2 logo não é primo.

Se n é ímpar, suponha $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 4^n + n^4 &= 4^{2k+1} + (2k + 1)^4 = 4.2^{4k} + (2k + 1)^4 \\ &= (\sqrt{2}.2^k)^4 + (2k + 1)^4 \\ &= (\sqrt{2}.2^k)^2 + (2k + 1)^2 + \sqrt{2}(\sqrt{2}.2^k)(2k + 1)]\cdot \\ &\qquad [(\sqrt{2}.2^k)^2 + (2k + 1)^2 - \sqrt{2}(\sqrt{2}.2^k)(2k + 1)] \\ &= [2^{2k+1} + (2k + 1)^2 + (2^{k+1})(2k + 1)]\cdot \\ &\qquad [2^{2k+1} + (2k + 1)^2 - (2^{k+1})(2k + 1)] \\ &= [2^n + n^2 + 2^{k+1}n][2^n + n^2 - 2^{k+1}n]. \qquad (*) \end{aligned}$$

Observe o segundo fator (o menor deles) dessa última expressão

$$\begin{aligned} 2^n + n^2 - 2^{k+1}n &= 2^{2k+1} + (2k + 1)^2 - 2^{k+1}(2k + 1) \\ &= 2.2^{2k} - 2.2^k(2k + 1) + (2k + 1)^2 \\ &= [2^k - (2k + 1)]^2 + 2^{2k} \geq 2^{2k} \geq 4 \text{ pois } k \geq 1. \end{aligned}$$

Os dois fatores em (*) são inteiros e positivos e o menor deles (o segundo) é maior ou igual a 4 logo $4^n + n^4$ não é primo.

Solução. 5 Observe que as progressões aritméticas e geométricas são casos particulares dessa seqüência, basta fazer $a = 1$ e $b = 0$, respectivamente.

$$\begin{aligned}
x_2 &= ax_1 + b\\
x_3 &= ax_2 + b = a(ax_1 + b) + b = a^2x_1 + (1 + a)b\\
x_4 &= ax_3 + b = a[a^2x_1 + (1 + a)b] + b = a^3x_1 + (1 + a + a^2)b\\
x_5 &= ax_4 + b = a^4x_1 + (1 + a + a^2 + a^3)b.
\end{aligned}$$

Usando o Princípio de Indução [Revista02], suponhamos que

$$x_n = ax_{n-1} + b = a^{n-1}x_1 + (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-2})b,$$

assim

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= ax_n + b = a[a^{n-1}x_1 + (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-2})b + b\\
&= a^nx_1 + (a + a^2 + \ldots + a^{n-1})b + b\\
&= a^nx_1 + (1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1})b.
\end{aligned}$$

Logo,

$$x_n = \begin{cases} x_1 + (n-1)b, & \text{se } a = 1\\ a^{n-1}x_1 + \left(\frac{1-a^{n-1}}{1-a}\right)b, & \text{se } a \neq 1. \end{cases}$$

Mais informações sobre este assunto você encontra em [14].

Solução. 6 Existem várias demonstrações desse fato. Uma delas, talvez a mais antiga, foi feita por Euclides cerca de 300 a.C.

Considere o Teorema Fundamental da Aritmética: "*Todo número inteiro maior que 1 pode ser expresso de modo único (exceto pela ordem) como um produto de primos.*"

Suponha que a seqüência dos primos: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ seja finita. Tome $A = 1+p_1p_2 \ldots p_n$. Ora, A é um inteiro maior que 1, logo satisfaz o Teorema acima. Então existe p primo que divide A. Se p pertence à lista $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ temos $p|A - 1$, como $p|A$ então $p|1$ o que é um absurdo. Logo p não pertecente à lista e a seqüência dos primos é infinita.

Solução. 7 Divida cada aresta ao meio, obtendo assim 8 "cubinhos" de aresta 1 e diagonal $\sqrt{3}$. Como temos 9 pontos, pelo menos 2 deles estarão no mesmo cubinho e assim a distância entre eles será menor ou igual a $\sqrt{3}$.

Solução. 8 Temos $BM = CN$ e $BG = CG$. Logo ΔBGC é isósceles e $C\hat{B}G = B\hat{C}G$. Observe que: $BM = CN$, $BC = BC$ e $C\hat{B}G = B\hat{C}G$, então os triângulos ΔBMC e ΔBNC são congruentes pelo caso LAL. Daí $B\hat{C}M = C\hat{B}N$ e ΔABC é isósceles.

Solução. 9 Suponha que Camila faça x depósitos e y retiradas, ou seja $x+y$ transações. Então devemos encontrar o valor máximo da expressão $198x - 300y$, sem ultrapassar 500, com x, y inteiros.

$198x - 300y = 6(33x - 50y)$ é múltiplo de 6, e o maior múltiplo de 6 menor ou igual a 500 é $498 = 6 \times 83$

$33x - 50y = 83$ e essa é uma Equação Diofantina Linear (Revista da Olimpíada vol.3). Uma solução particular dessa equação é $(x_0, y_0) = (51, 32)$. E a solução geral é

$$x = 51 - 50ty = 32 - 33t$$

com as restrições $x, y \geq 0 \Rightarrow t \leq 0$.

A quantidade de transações é $x + y = 83 - 83t$, como $t \leq 0$ o menor valor positivo de $x+y = 83$ é obtido quando $x = 51$ e $y = 32$. Conclusão a maior quantia retirada por Camila é R\$498,00 e ela pode fazer isso com no mínimo 83 transações sendo 51 depósitos e 32 retiradas.

Solução. 10 Como $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ temos $d(x, y) = |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$d(F(x), F(y)) = d(x, y) \Rightarrow |F(x) - F(y)| = |x - y|$$

Faça $y = c$ (constante)

$$|F(x) - F(c)| = |x - c| \Rightarrow F(x) - F(c) = \pm(x - c)$$

Daí vêm dois casos:

i) $F(x) = x + F(c) - c$

ii) $F(x) = -x + F(c) + c$

Dos dois temos $F(x) = \pm x + k, k \in R$

Solução. 11 Somando o quadrado das duas equações obtemos

$$9(\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A) + 16(\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B) + 24(\operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A) = 37.$$

Portanto, $24 \operatorname{sen}(A+B) = 12$. Daí, $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen}(180^o - A - B) = \operatorname{sen}(A+B) = 1/2$, logo o ângulo $C = 30^o$ ou $C = 150^o$

A última possibilidade é impossível porque implicaria $A < 30^o$ e conseqüentemente $3 \operatorname{sen} A + 4 \cos B < 3.(1/2) + 4 < 6$, uma contradição. Então, o ângulo $C = 30^o$.

Solução. 12 O número

$$999\,919 = 1\,000\,000 - 81 = 1\,000^2 - 9^2 = (1\,000 - 9)(1000 + 9)$$

não é primo. $1\,000\,343$ também não é, pois,

$$1\,000\,343 = (100^3 + 7^3) = (100 + 7)(100^2 - 700 + 7^2).$$

Solução. 13 Seja K a constante mágica de um quadrado mágico de ordem n. K é dada somando os elementos do quadrado mágico e dividindo pelo número de linhas. Os elementos de um quadrado mágico de ordem n $1, 2, ..., n^2$, formam uma progressão aritmética de razão 1, primeiro termo $a_1 = 1$ e último termo $a_n = n^2$. A soma S dos termos da progressão é:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + n^2)n^2}{2}.$$

Então, $K = \dfrac{(1 + n^2)n}{2}$.

Solução. 14 Temos que,

$$(a+1)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{2} a^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1} a + 1 = ka + 1.$$

Assim,

$$1 + 4^n = 1 + (3+1)^n = 1 + 3^n + \binom{n}{1} 3^{n-1} + ... + \binom{n}{n-1} 3 + 1 = 3k + 2$$

e, portanto, 3 não é um divisor de $1 + 4^n$.

Solução. 15Considere dois coeficientes binomiais consecutivos $\binom{n}{p-1}$ e $\binom{n}{p}$ e calcule seu quociente:

$$\binom{n}{p}\binom{n}{p-1} = \frac{\frac{n!}{p!(n-p)!}}{\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}} = \frac{n-p+1}{p}.$$

Os valores de $\binom{n}{p}$ irão crescendo, até atingir o máximo se, e somente se, $\frac{n-p+1}{p} > 1$.

Portanto:

$$n - p + 1 > p \Leftrightarrow n - 1 > 2p \Leftrightarrow p < \frac{n+1}{2}.$$

Isto é, $\binom{n}{p}$ irá crescendo, quando p variar de 0 até o menor inteiro que não supera $\frac{n+1}{2}$, que é $\binom{n}{2}$. Os valores de $\binom{n}{p}$ irão decrescendo se, e somente se, $\frac{n-p+1}{p} < 1$.

Portanto:

$$n - p + 1 < p \Leftrightarrow n + 1 < 2p \Leftrightarrow p > \frac{n+1}{2}.$$

Isto é $\binom{n}{p}$ irá decrescendo, quando p variar de $\frac{n}{2} + 1$ até n.

Solução. 16 Escreva 9 como $10 - 1$ e use o teorema da expansão binomial. Os termos que influenciam os quatro últimos dígitos são os quatro últimos termos, pois todos os outros termos tem 10^n, onde $n \geq 4$, como fator. A soma dos últimos quatro termos é

$$\binom{2003}{2000}(10)^3(-1)^{2000} + \binom{2003}{2001}(10)^2(-1)^{2001} +$$
$$+ \binom{2003}{2002}(10)^1(-1)^{2002} + \binom{2003}{2002}(10)^0(-1)^{2003}.$$

Simplificando, obtemos

$$\left(\frac{2003.2002.2001}{6}.1000\right) - \left(\frac{2003.2002}{2}.100\right) + \left(\frac{2003}{1}.10\right) - 1 = ...0729.$$

Bibliografia

[1] *Reis I.*, Fundamentos da Matemática-Editora Moderna-1996

[2] *Iezzi G., O. Dolce e A. Machado*, Matemática e Realidade-8ª série- Atual editora

[3] site: Portal Matemático.

[4] http://sites.uol.com.br/sandroatini.

[5] Eureka!, nº 1 e 4, Olimpíada Brasileira de Matemática, SBM.

[6] Revista do Professor de Matemática, nº 32, 33 e 35, SBM.

[7] *Wagner E. e J. P. Q. Carneiro* , Construções Geométricas. Coleção Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro.

[8] Olimpíada Brasileira de Matemáitca, 1979, 1983.

[9] Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª: problemas e resolução / compilado por Élio Mega e Renate Watanabe; Comissão de Olimpíadas da SBM, São Paulo: Atual, 1995.

[10] *Lima, E. L.*. Álgebra Linear (4ª Edição). Rio de Janeiro, IMPA, CNPQ, 2000.

[11] *Santos, J. P. de O.*, Introdução à Teoria dos Números. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1998.

[12] *H.S.M. Coxeter*, Introduction to Geometry, Second Edition, Wiley Classics Library Edition Published, 1989.

[13] X Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte (1999)

[14] *Morgado, A. C. et. all*, Progressões e Matemática Financeira, CPM, SBM, 1993.

[15] *Santos, A. L. e Raul F. W. Agostinho*, Problemas Selecionados de Matemática, Vol.1.

Esta seção contou com a colaboração dos alunos:

Manuela Caetano de Resende Ferreira
Daniel Mendes Azeredo
Bruno Borges de Souza Lima
Franciane José da Silva
Marcos Wisner Valgas

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 4, 2003, 23-27

Classificados na *XI* Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Participaram 1 505 alunos de 224 Estabelecimentos de Ensino [1].

[1] O quadro mostra os Estabelecimentos de Ensino com alunos classificados nos níveis 1, 2 ou 3.

	Est. de Ensino (cidade)		Est. de Ensino (cidade)
1	Visão (Goiânia)	26	Núcleo Educativo (Catalão)
2	Couto Magalhães (Anápolis)	27	Mª R. Rodrigues (Ap. de Goiânia)
3	E. Paulo Freire (Catalão)	28	S. Mª dos Anjos (Quirinópolis)
4	Mega (Goiânia)	29	Pré-Médico (Goiânia)
5	I. P. de Educação (Goiânia)	30	Ateneu Dom Bosco (Goiânia)
6	Diocesano (Itumbiara)	31	Externato São José (Goiânia)
7	Lassale (Goiânia)	32	I. Mª Auxiliadora (Goiânia)
8	Porto Seguro I (Goiânia)	33	Álvaro de Melo (Ceres)
9	Objetivo (Goiânia)	34	I. E. Emmanuel (Goiânia)
10	Progressivo (Goiânia)	35	Hugo de C. Ramos (Goiânia)
11	Dinâmico (Goiânia)	36	Auxilium (Anápolis)
12	Santa Clara (Goiânia)	37	Alfa e Beta (Goiânia)
13	Agostiniano (Goiânia)	38	Batista (Brasília)
14	Frei A. Voogt (Goiânia)	39	A. N. E. Superior (Ap. de Goiânia)
15	Anglo (Goiânia)	40	Jardim América (Goiânia)
16	Integrado Jaó (Goiânia)	41	Campus (Goiânia)
17	Crescer (Anápolis)	42	Mª Júlia (Goiânia)
18	Antares (Goiânia)	43	I. Samuel Graham (Jataí)
19	Anhanguera (Goiânia)	44	Aphonsiano (Trindade)
20	CEPAE - UFG (Goiânia)	45	Nascentes do Araguaia (Mineiros)
21	Santo Agostinho (Goiânia)	46	Interativa (Goiânia)
22	Marista (Goiânia)	47	Soc. E. Luc Vil (Goiânia)
23	Disciplina (Goiânia)	48	Exato (Iporá)
24	Objetivo (Catalão)	49	Quadrangular (Anápolis)
25	Expovet (Goiânia)	50	Sistema Anglo de Ensino Goiânia)

Classificados do Nível 1

	Nome	E.E.	Class.
1	Letícia Goulart Netto	3	1º
2	Pedro Antônio Guedes	6	2º
3	Raquel de Oliveira Morais	8	3º
4	Fernanda Pedrosa Torres	22	4º
5	William M. Lourenço de Faria	14	4º
6	Juliana de Miranda Ochoa Peña	32	5º
7	Marcelo Faleiros Costa	22	6º
8	Ney César de Melo Filho	17	6º
9	Felipe Cavalcanti Garcia de Castro	37	7º
10	Fernanda Caixeta Ramos Caiado	29	8º
11	Paulo Victor Cunha Costa	44	8º
12	Nathalya Ala Yagi	9	8º
13	Vinícius Queiroz de Almeida	23	8º
14	Wesley Sales Massuda	5	8º
15	Luiza Ninon de Souza Melo	13	9º
16	Natan Dutra Reis	13	10º
17	Ana Carolina Serafim Vilela	45	11º
18	Lucas de Oliveira Serra Hortêncio	23	11º
19	Murillo Gouveia de Morais	33	11º
20	Rebecca Perillo da Veiga Jardim	32	11º
21	Filipe Augusto B. Benvenutti	30	12º
22	Kamila Muhamad de Souza	46	12º
23	Lucas Ribeiro G. de Campos	10	12º
24	Felipe Freitas Braga	35	13º
25	Loreta da Silva Oliveira	12	13º
26	Ana Paula Valeriano Rêgo	47	14º
27	Arthur de Melo Vitorino	48	14º
28	David Issa Mattos	17	14º
29	Elissa Stein Naves de Brito	22	14º
30	Pedro Victor Aniz gomes de Oliveira	32	14º
31	Fernanda Akemi O Mochezuki	4	15º
32	Lílian Cristina Rosa Santos	10	15º
33	Maria Gabriela G. Caldas	5	15º
34	Ramiro Dourado Maranhão	16	15º

Classificados do Nível 1, continuação.

	Nome	E.E.	Class.
35	Daniel Meireles de Resende	6	16º
36	Diogo Camargos Gomes	49	17º
37	Phelip Jonathas de A. Moreira	7	17º
38	Raul Pires F. Borges	6	17º
39	Lucas Stutz Lopes Franco	5	18º
40	Natália Yumi Kawassaki	35	18º
41	Rhaísa Ghannan Macedo	17	18º

Classificados do Nível 2

	Nome	E.E.	Class.
1	Jonathas Souza Silveira	2	1º
2	Rodolfo Santos Costa Maçaranduba	5	2º
3	Renato Moreira Magalhães	7	3º
4	Lira Rocha da Mota	4	4º
5	Pedro Henrique Terra Estrela	13	5º
6	Ewerton Martins de Menezes	15	6º
7	Hugo Alves Akitaya	16	6º
8	Thiago Alves Akitaya	16	7º
6	Francisco Habib Issa Mattos	17	8º
10	Adriano Lisbôa Oliveira	18	9º
11	Henrique Eiji Mikado	19	9º
12	Ícaro Sales Rezende	20	9º
13	Vítor Maia	17	9º
14	Cejana Loose Pucci	15	10º
15	Amanda Isaías Naves	17	11º
16	Raquel Teles Bittencourt	21	11º
17	André Rodrigues Salerno	5	12º
18	Pedro Henrique G. de Oliveira	20	12º
19	Luciana M. R. Salgado	22	13º
20	Milena Dias Vasconcelos	5	13º
21	Érika Goulart Rodrigues	5	14º
22	Skárlet Khouri Silva	17	14º

Classificados do Nível 2, continuação.

	Nome	E.E.	Class.
23	Thaíza Passaglia Bernardes	4	14º
24	Adriano Possebon Rosa	3	15º
25	Henrique Tadeu de Pina Jayme	23	15º
26	João Paulo Cândido N. Silva	24	15º
27	José Profiro Moreira Júnior	27	15º
28	Laís de Souza Meireles	26	15º
29	Luiz Miguel P. Barini	25	15º
30	Mateus Quaresma Mendonça	4	15º
31	Murilo Borges Vieira	28	15º
32	Pedro Teixeira Matias	26	15º
33	Uiara Rios Pereira	29	15º
34	Victor Emmanuel da Costa Cirilo	30	15º
35	Brenno R. Gomes	31	16º
36	Cristyene Gonçalves Benício	32	16º
37	Erick Assis Lima	22	16º
38	Iran Carlos Machado F. Filho	50	16º
39	Hélio Kazuo Júnior	33	16º
40	Natália Silva Nascimento	34	16º
41	Paulo Antônio Viana Jr.	16	16º
42	Paulo Henrique Martins Silva	35	16º
43	Pedro Henrique Silva Bentes	10	16º
44	Rafaela Rocha Lopes	36	16º
45	Sávio Augusto Teixeira e Silva	37	16º
46	Yuri de Araújo Carvalho	38	16º
47	Camila Menezes de Oliveira Machado	21	17º
48	Diego Campos Rocha David	9	17º
49	Diego Souto Pereira	39	17º
50	Heliton Fernandes do Carmo	40	17º
51	Juliane Batista de Magalhães Pereira	41	17º
52	Monique Borges Machado	42	17º
53	Sheila Sales Massuda	5	17º
54	Alexandre F. da Veiga Jardim	31	18º
55	Ana Carolina T. S. da Costa	34	18º

Classificados do Nível 2, continuação.

	Nome	E.E.	Class.
56	Filipe Oliveira de Melo Rosa	36	18º
57	Isa Maria Bastos Mendes Silva	13	18º
58	Marília Mota Rezende	16	18º
59	Michele Jussara Bagestão	43	18º
60	Nara Ávila Moraes	13	18º
61	Nile William Fernandes Hamdy	24	18º

Classificados do Nível 3

	Nome	E.E.	Class.
1	Márcio Antonio Ferreira Belo Filho	1	1º
2	Thiago Carneiro Elias	4	2º
3	Saulo Cavalcante dos Reis	4	2º
4	Guilherme Rodrigues Salerno	1	3º
5	Caio Oliveira Guimarães	9	4º
6	Daniel Augusto B. de Oliveira	10	5º
7	Gustavo Jubé Xavier Nunes	11	5º
8	Samuel Regis Pires Carrijo	1	5º
9	Danilo Borim do Nascimento	12	6º
10	Diogo Rodrigues de Souza	10	6º
11	Danilo Vieira Castejan	5	7º
12	Leonardo Santos R. Braz da Silva	13	7º
13	Thaís Costa e Silva	11	7º
14	Rafael Prudente Mamare	1	8º

REVISTA DA OLIMPÍADA - IME - UFG, nº 4, 2003, 29-31

Notícias

• **Semana Olímpica**. Foi realizado no IME/UFG, de 17 a 24 de janeiro de 2003, a IV *Semana Olímpica* da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

Durante a semana olímpica, os alunos ganhadores da XXIV *Olimpíada Brasileira de Matemática* participaram de um treinamento intensivo com professores de diversas partes do país.

Este treinamento teve como objetivo a preparação das equipes brasileiras para participações nas olimpíadas internacionais. Também foi realizado durante a Semana Olímpica a premiação (entrega de medalhas) aos classificados na XXIV Olimpíada Brasileira de Matemática.

A cerimônia contou com a participação dos coordenadores da OBM, professores Nicolau Saldanha e Carlos Gustavo Moreira, da Secretária de Educação do Estado de Goiás Profª. Eliana França, da Pró - Reitora de Extensão e Cultura da UFG profª. Ana Luiza Lima Sousa, do prof. Jeblin Abraão representando a secretária de Educação do Município de Goiânia Walderês Loureiro, da Diretora do IME Profª. Gisele Araújo, do Coordenador Regional Prof. Ronaldo Garcia, que compuseram a mesa. Além disso, diversos membros da Comissão Nacional de Olimpíadas da Soc. Brasileira de Matemática prestigiaram o evento.

A Semana Olímpica contou com ampla cobertura da imprensa local (jornal e televisão).

• A *XII* **Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás** será realizada no dia **04 de outubro de 2003** das 13:30h às 18:00h, nos campi da UFG de: Goiânia, Catalão, Jataí e Rialma, nos campi da UEG de: Anápolis, Iporá, Quirinópolis e Porangatu e na cidade de Itumbiara.

Para participar a escola deve estar cadastrada. A ficha de cadastramento e de inscrição se encontram no final desta revista.

O cadastramento e as inscrições deverão ser enviadas à Coordenação de Olimpíadas, em **Goiânia**, até **29 de agosto de 2003**. Poderão participar, por escola, até:

▷ 5 alunos no nível 1 (5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental)

▷ 5 alunos no nível 2 (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)
▷ 10 alunos no nível 3 (Ensino Médio).

A seleção dos alunos participantes na Olimpíada Regional fica a critério da escola, podendo ser utilizada a prova da 1ª fase da Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM para esta seleção.

• A **25ª Olimpíada Brasileira de Matemática** será realizada nos níveis 1, 2 e 3 em três fases:
▷ 1º fase 07/06/2003 na escola.
▷ 2º fase 13/09/2003 na escola.
▷ 3º fase 18 e 19/10/2003, no Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

Para participar a escola deve se cadastrar na Secretaria da OBM. A ficha pode ser encontrada no site: www.obm.org.br

• Datas de Outras Olimpíadas:

▷ A **25ª Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Universitário** será realizada em duas fase. A primeira fase será em 13 de setembro de 2003 e a segunda fase será nos dias 18 e 19 de outubro de 2003 no Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Poderão participar alunos de qualquer curso universitário.

▷ A **Olimpíada de Maio** é uma competição realizada para jovens alunos, disputada em dois níveis (Nível 1: para alunos até 13 anos e Nível 2: para alunos de até 15 anos), por países da América Latina, Espanha e Portugal. No Brasil a olimpíada de maio é aplicada apenas àqueles aos alunos que tenham sido premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática (medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas) e para os alunos classificados na XI Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás . Este ano será realizada a 9ª Olimpíada de Maio no dia 10 de maio de 2003, nos locais designados por cada coordenação regional.

▷ A **Olimpíada de Matemática do Cone Sul** é uma competição internacional da qual participam os países da porção meridional da América do Sul, representados por equipes de 4 estudantes que não tenham feito 16 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da Olimpíada. Este ano será realizada a 14ª Olimpíada de Matemática do Cone Sul na cidade de Ica, Peru entre os dias 23 a 30 de maio de 2003.

▷ A **Olimpíada Iberoamericana de Matemática** é uma competição internacional da qual participam os países da América Latina, Espanha e Portugal, representados por equipes de até 4 estudantes que não tenham feito 18 anos de idade em 31 de dezembro do ano imediatamente anterior à celebração da olimpíada e que não tenham participado anteriormente em duas OIM. Este ano a 18ª OIM será realizada na Argentina de 13 a 20 de setembro, na cidade de Mar del Plata.

▷ A **Olimpíada Internacional de Matemática** é a mais importante competição internacional, realizada desde 1959. Participam dessa competição cerca de 100 países de todo o mundo, representados por equipes de até 6 estudantes secundários ou que não tenham ingressado na Universidade ou equivalente, na data da celebração da Olimpíada. Este ano a 44ª IMO será realizada nos dias 07 a 19 de julho em Tókio - Japão.

• Será realizado o **VII Encontro de Matemática e Estatística (XVIII Semana da Matemática)** no IME, de 09 a 13 de junho de 2003. Maiores informações por: telefone 521-1208, e-mail eme@mat.ufg.br ou site www.mat.ufg.br.

• O **Laboratório de Educação Matemática (LEMAT)** do IME realizará a *X* **Jornada de Educação Matemática** de 06 a 09 de novembro de 2003. O LEMAT também realiza curso de atualização e presta assessoria a professores do ensino fundamental e médio. Maiores Informações pelo telefone 521-1124 com Silmara Epifânia de Castro Carvalho.

• O **Simpósio de Matemática - XIV Jornada de Matemática de Catalão** será realizada no Campus Avançado de Catalão de 22 a 24 de outubro de 2003. Maiores informações com o professor Carlos Alberto Pereira dos Santos pelo e-mail crsantos@mat.unb.br ou pelo telefone (0XX62) 447 56 42.

• O **II Encontro de Matemática e Educação Matemática de Jataí (ENEM)** será realizada no Campus Avançado de Jataí de 25 a 27 de setembro de 2003. Maiores informações com o professor Lúcio Aurélio Purcina pelo e-mail lapurcina@bol.com.br ou pelo telefone 99 55 05 73.

• A **VII Jornada de Matemática de Rialma** será realizada no período de 10 a 12 de julho de 2003 em Rialma. Maiores informações por e-mail: jhilario@mat.ufg.br ou no site: www.mat.ufg.br/cursos/rialma.

• **Curso de Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Médio**. Este é um programa visa oferecer treinamento para professores de Matemática do Ensino Médio de Goiânia e cidades vizinhas. O curso será transmitido via internet com aulas ministradas por professores do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (**IMPA**) sediado no Rio de Janeiro e está vinculado às atividades Instituto do Milênio IMA-

GIMB/IMPA, no qual o IME/UFG está participando como centro de desenvolvimento. A transmissão será feita com auxílio da RNP e esperamos que esta experiência pioneira seja fundamental para o fortalecimento das atividades de ensino de matemática no nosso Estado. Será realizado no período de 21 a 25 de julho de 2003. Informações por e-mail: jhilario@mat.ufg.br ou www.mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 4, 2003, 33-37

Soluções das Provas da XI OMEG

A redação da Comissão como base as soluções apresentadas pelos alunos participantes.

Nível 1

1Problema S)e trocarmos 4 algarismos da operação de adição $111 + 222 + 333 + 444$ por zeros o resultado é 659, veja o exemplo abaixo

$$\begin{array}{r} 110 \\ 202 \\ 303 \\ \underline{044} \\ 659 \end{array}$$

Nas duas operações de adição indicadas abaixo troque um algarismo de cada número por zero e obtenha os resultados indicados. Justifique sua resposta.

$$\begin{array}{r} 555 \\ 444 \\ 333 \\ \underline{\ 222} \\ 847 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 555 \\ 444 \\ 333 \\ \underline{\ 222} \\ 712 \end{array}$$

Solução: [**Fernanda Pedrosa Torres**]
Primeiro observe se a soma dos algarismos das unidades 5+4+3+2 = 14. No caso dá 14 e você sabe que deve colocar 0 na casa das unidades para dar 7. No caso coloquei 0 no lugar do 5 e do 2 pois $5 + 2 = 7$ e

$14 - 7 = 7$. Também poderíamos ter colocado no lugar dos algarismos 4 e 3. Arrumando as unidades vamos para as dezenas, onde a soma os algarismos dever se um número que termina em 4, $5 + 4 + 3 + 2 = 14$. Vimos que a soma dos algarismos das dezenas já estão certas e não precisa ser trocada, então vamos para as centenas, onde sabemos que devemos colocar o 0 nos algarismos dos números que ainda não foram mudados e ver se a soma dá certo (a soma é 8, não esquecendo na hora de somar o 1 que veio das dezenas): $0+4+3+0+1 = 8$. Como a soma deu 8 achamos todos os algarismos que devemos mudar $550+044+033+220 = 847$. Observação: Eu poderia também ter mudado o 4 e 3 nas unidades e o 5 e 2 nas centenas: $055 + 440 + 330 + 022 = 847$.

A soma dos algarismos das unidades dá 14 mas deve ser 12 (não pode ser 2 pois deveria alterar três números e depois deveria alterar mais dois números). Alterando o 2 para 0 a soma será 12 e estará certo os números das unidades. Nas dezenas a soma dever dar 11, altera-se o 4 pois: $5 + 0 + 3 + 2 + 1 = 11$, 1 veio do 12. Agora nas centenas é só alterar os números que sobraram, no caso, 5 e 3 e ver se a soma dos algarismos dá 7: $0 + 4 + 0 + 2 + 1 = 7$, 1 veio do 11 das dezenas.

2Problema A)s letras E, G, I, M, O, X da sigla XIOMEG e os algarismos 0, 2 do ano 2002 alternam-se como segue:

$IOMEGX$	0022	*Linha* 1
$OMEGXI$	0220	*Linha* 2
$MEGXIO$	2200	*Linha* 3
.	.	
.	.	
.	.	
$GXIOME$	2200	*Linha ...*
$XIOMEG$	2002	*Linha ...*
$IOMEGX$	0022	*Linha ...*
.	.	
.	.	
.	.	

Qual é o número mínimo de linhas necessárias para que XIOMEG 2002 apareça pela primeira vez? Justifique sua resposta.

Na linha 2002 qual é a posição das letras e dos algarismos? Justifique sua resposta.

Solução: [Letícia Goulart Netto, Marcelo Faleiros Costa]

Na linha 12, pois $XIOMEG$ possui 6 letras e 2002 possui 4 algarismos. É só calcular o mínimo múltiplo comum de 6 e 4 para chegar ao resultado.

Na linha 2002 será $EGXIOM0220$. Para chegar ao resultado é só dividir 2002 por 12 e analisar o resto. O resto mostrará o número da linha 10 que é $EGXIOM0220$.

3PROBLEMA U)ma loja vende buquês confeccionados com até três tipos de flores, digamos A, B e C. Os preços de alguns buquês são:
i) Um buquê com duas flores A, uma flor B e uma flor C custa R$4,20;
ii) Um buquê com uma flor A, uma flor B e duas flores C custa R$3,80;
iii) Um buquê com duas flores A e duas flores B custa R$4,80.

a) Com base nos dados descritos acima quanto custará um buquê formado com uma flor A e três flores C? Justifique sua resposta.

b) Com base nas informações dadas nos ítens i), ii) e iii) é possível calcular o preço de cada flor e portanto de um dado buquê com as flores descritas? Justifique sua resposta.

Solução: [Raquel de Oliveira Morais] Com as informações dos ítens i), ii) e iii) obtemos o seguinte sistema:

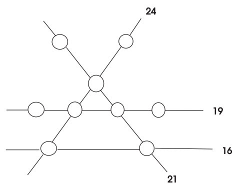
$$\begin{aligned} i)\ \ 2A+B+C &= \ 4,20\\ ii)\ \ A+B+2C &= \ 3,80\\ iii)\ \ 2A+2B \quad &= \ 4,20. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema obtemos $A = 1,10$, $B = 1,30$ e $C = 0,70$.

a) O buquê custará R$ $3,20$, pois uma flor A custa R$ $1,10$ e uma flor C custa R$ $0,70$ e portanto $1,10 + 3 \times 0,70 = 3,20$.

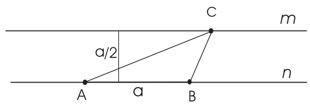
b) Sim, é possível. Organiza-se o sistema e em iii) isola $2B$. Então calcula o i) e descobre que $2C = 3,60 - 2A$. Então calcula-se ii) e descobre o valor de A. Ao descobrir o valor de A, descobre-se o valor dos restantes.

4PROBLEMA C)oloque números de 1 a 9 sem repetições em cada círculo do diagrama abaixo de modo que cada linha tenha a soma indicada. Justifique sua resposta.



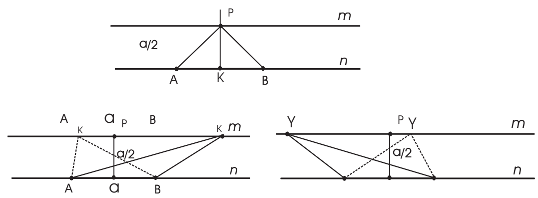
Solução: [**Pedro Antônio Guedes**] Primeiro comecei com a soma dos círculos que é 16; coloquei todos os números possíveis na conta e fiz os outros colocando todos os números possíveis de cada soma soma. Assim fui conseguindo organizar as somas até ficarem certas.

$5^{\underline{a}}$ **Questão:** Conforme indicado na figura abaixo as reta m e n são paralelas, o segmento AB tem comprimento a e a distância entre m e n é $a/2$. Dado um ponto C na reta m temos definido um triângulo ABC cujos vértices são os pontos A, B e C. Quantos pontos em m podem ser obtidos de maneira que o triângulo ABC, conforme descrito, seja isósceles (dois lados com o mesmo comprimento)? Justifique sua resposta.

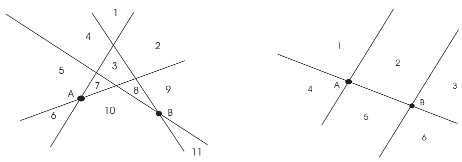


Solução: [**William Macedo Lourenço de Faria, Ney César de Melo Filho**]
Primeiro caso: Analisando a figura seja K o ponto médio de AB. Tomando um ponto P na reta n alinhado a K, conclui-se que AP é congruente a KB. Como m e n são paralelas, e P é o encontro de AP e BP, então isso reafirma que $AP = BP$, pois B e A estão a mesma distância que P.
Segundo caso: Analisando a figura, com Y na reta m conclui $AY = AB$ (AB mesma distância que AY).
Terceiro caso: Analisando a figura, com K na reta m conclui $BK = AB$ (AB mesma distância que AY). Quarto caso: Invertendo BK e YA para

os lados opostos (BK para a direita e YA para a esquerda são mais dois casos.



6Problema A) figura abaixo mostra as seguintes configurações geométricas. Na primeira configuração, por dois pontos distintos A e B no plano passam duas retas dividindo o plano em 11 regiões, sendo três limitadas (as indicadas pelos números 3, 7 e 8) e oito não limitadas. Na segunda configuração temos 6 regiões não limitadas.



Como base nesta informação faça os ítens abaixo (os desenhos deverão ser a mão livre), justificando sua resposta.

i) Dados dois pontos distintos A e B, trace duas retas por A e duas retas por B de modo a obter 10 regiões.

ii) Dados dois pontos distintos A e B, trace três retas por A e duas retas por B e obtenha 15 regiões, sendo 10 não limitadas.

iii) Dados dois pontos distintos A e B, trace duas retas por A e duas retas por B de modo a obter 9 regiões.

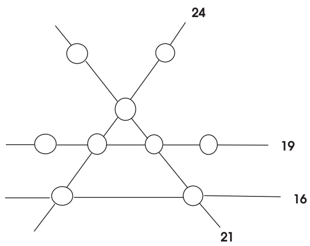
Solução: **[Raquel de Oliveira Morais]** i) Neste item, não havia a determinação de regiões limitadas ou não. Então ficou mais fácil para encontrar a solução. Na primeira tentativa, fiz as retas da maneira como se corta uma pizza. Só encontrei 8 regiões. Então, percebi que abaixando um pouco uma das retas, eu formaria 8 regiões não delimitadas e 2 delimitadas.

ii) Este item exigia mais que o anterior, já que devemos formar 15 regiões, sendo 10 limitadas. Então pensei em traçar as três retas por A desta forma (duas formando um $\times$ e uma cortando) e fazendo as 2 retas que passam por B em forma de tesoura, pois unindo-as, chegaria ao resultado.

iii) Como neste item também não havia determinação de regiões limitadas ou não, me lembrei do jogo da velha que está configurado em 9 regiões e que obedece as normas.

Nível 2

1Problema C)oloque os números de 1 a 9, sem repetições, em cada círculo do diagrama abaixo de modo que cada linha tenha a soma indicada. Justifique sua resposta.

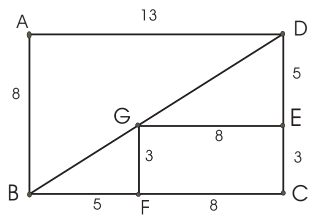


Solução: [Rodolfo Santos Costa Maçaranduba] Esta questão se resolve por tentativa, mas utilizar alguns "truques" ajuda. Por exemplo:

- Você deve resolver as somas que só há uma forma de fazer;
- Você deve colocar os números de maior e menor valor sozinhos, onde ele só seja utilizado uma vez;
- Em uma onde você colocou um número muito grande você deve colocar um valor pequeno para equilibrar a soma.

As soluções são (números ordenados por linha): $1, 3;\ 6;\ 4, 8, 5, 2;\ 7, 9$ e $1, 3;\ 6;\ 2, 8, 5, 4;\ 7, 9$.

2Problema E)xplique o erro presente na afirmativa a seguir: *Um retângulo de* $13m$ *de comprimento e* $8m$ *de largura é decomposto como mostra a figura abaixo, em três triângulos e um retângulo. A área do retângulo original é* $104m^2$*, mas se somarmos as áreas de cada parte da decomposição temos* $52 + 20 + 7,5 + 24 = 103,5m^2$.



Solução: [**Lira Rocha da Mota**] Pelo teorema de Tales $\triangle BFG \sim \triangle GED$. Logo $5/8 = 3/5 \Rightarrow 25 = 24$ que é um absurdo.

3Problema S)eja k um número inteiro ímpar e n um número natural qualquer. Das afirmações abaixo indique as afirmações verdadeiras e também as falsas a respeito do número $k^2 + nk$. Justifique todas as afirmações dadas, as falsas e as verdadeiras.

i) é sempre ímpar;

ii) é par se n é par;

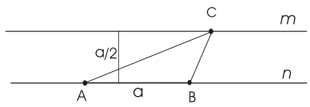
iii) é ímpar somente se n é par;

iv) é sempre par;

v) é ímpar somente se n é ímpar.

Solução: [**Jonathas Souza Silveira**] Considerando os números pares, aqueles que podem ser divididos em 2 grupos, pela lógica e pensando um pouco, pensei nas seguintes situações: P=par, I=ímpar Conclusão: $P \times P = P$, $P \times I = P$, $I \times I = I$ $P + I = I$ $I + I = P$, $P - P = P$, $P - I = I$, $I - I = P$. Assim pude verificar na conta (levando em conta que todo número inteiro elevado ao quadrado é positivo, positivo $\times$ negativo é negativo e positivo × positivo é positivo). Logo $k^2 + nk = I \pm P/I$. Com estas observações concluí que o item i) é falso, ii) é falso, iii) é verdadeiro, iv) é falso e v) é falso

4Problema C)onforme indicado na figura abaixo as reta m e n são paralelas, o segmento AB tem comprimento a e a distância entre m e n é $a/2$. Dado um ponto C na reta m temos definido um triângulo ABC cujos vértices são os pontos A, B e C. Quantos pontos em m podem ser obtidos de maneira que o triângulo ABC, conforme descrito, seja isósceles (dois lados com o mesmo comprimento)? Justifique sua resposta.



Solução: [Ewerton Martins de Menezes]

Somente 5 pontos. De cada vértice A e B podem sair 2 segmentos com comprimentos iguais a. E ainda podemos traçar uma mediatriz e a partir do ponto em que intersectar a reta m formamos um triângulo isósceles.

5Problema S)uponha que a seja solução da equação

$$x = 1 + \frac{1}{1+x}.$$

a) Prove que a é também solução da equação

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x+1}}}}.$$

b) Calcule o valor de a.

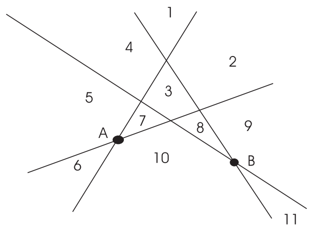
Solução: [Rodolfo Santos Costa Maçaranduba]

a) a também é solução da equação porque se você for substituindo $2 + \frac{1}{1+x}$ por $x + 1$ você vai encontrar o valor da equação proposta.

A substituição pode ser feita porque $2+\frac{1}{1+x}$ é a mesma coisa que $1+1+\frac{1}{1+x}$; então você substitui $1+\frac{1}{1+x}$ por x e encontra o $x+1$; novamente repete o processo.

b) $x = 1+\frac{1}{1+x} \Rightarrow x(x+1) = x+1+1 \Rightarrow x^2+x =^+ 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

6PROBLEMA A) figura abaixo mostra uma configuração geométrica. Por dois pontos distintos A e B no plano passam duas retas por cada ponto dividindo o plano em 11 regiões, sendo três limitadas e oito não limitadas. Como base nesta informação faça os ítens abaixo (os desenhos



deverão ser a mão livre). Justifique sua resposta.

i) Dados dois pontos distintos A e B, trace duas retas por A e duas por B de modo a obter 10 regiões.

ii) Dados dois pontos distintos A e B, trace três retas por A e duas retas por B e obtenha 15 regiões, sendo 10 não limitadas.

iii) Dados dois pontos distintos A e B, trace três retas por A e três retas por B e obtenha 18 regiões.

iv) Dados dois pontos distintos A e B, trace três circunferências por A e duas retas por B e obtenha 16 regiões.

Solução: [Thiago Alves Akitaya]

i) Para tirar uma região só movi a reta que passa em B que divide a região 2 da 3 (desenho original) e a fiz paralela à reta que passa por A e divide a região 3 da 4 (desenho original). Assim a região 3 foi eliminada.

ii) Para formar mais 4 regiões, tracei na figura original uma reta que passa no ponto A e que divida a região 10 em duas, que divida a região 11 em duas, que divida a região 5 em duas e que também divida a região 9 em duas.

iii) Usei como base a figura do exercício do item i) e adicionei 4 regiões como no exercício do item ii) passando uma linha no ponto A. Agora tenho 14 regiões e para adicionar mais quatro tracei uma reta pelo o ponto B uma outra paralela a uma reta que passa por A e assim criei mais 4 regiões, totalizando 18.

iv) Com três circunferências compartilhando o ponto A formei 7 regiões. Traçando uma reta pelo ponto B dividi 5 das 7 regiões. Já com 12 regiões tracei outra reta por B agora dividindo 4 das 12 regiões e passando sobre o ponto denominado C, que é o ponto onde duas das circunferências se cruzam a fim de não criar uma 17^a região desnecessária.

Nível 3

1PROBLEMA C)onsidere um círculo C de área A_0 que rola, sem deslizar, ao longo da hipotenusa AB de um triângulo retângulo isósceles ABC, de modo que ele percorra uma volta completa de sua circunferência. Faça os ítens abaixo justificando sua resposta.

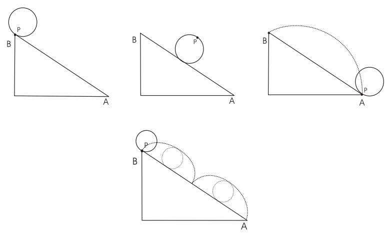
a) Faça uma figura que retrate a posição do círculo no início, no meio e no fim do percurso.

b) Calcule a área do triângulo em função de A_0.

c) Esboce a curva descrita pelo ponto P do círculo que no início coincide com o vértice B e no final coincide com o vértice A do triângulo ABC. E se o círculo realizar 2 voltas completas para sair de B e chegar em A, qual será a curva?

Solução: [**Saulo Cavalcante dos Reis**] Pelas condições do enunciado, a hipotenusa de ABC mede $2\pi r$ onde r é o raio do círculo. Em função de A_0 temos $r^2 = A_0/\pi$. Daí, por Pitágoras, em ABC fica: $l^2 + l^2 = (2\pi r)^2$, onde l é a medida dos catetos de ABC. Continuando, $2l^2 = 4\pi^2 r^2 \Rightarrow l^2 = 2\pi^2 A_0/\pi \Rightarrow l^2/2 = \pi A_0$. Como a área do triângulo ABC é $A = l^2/2$ obtemos $A = \pi A_0$

Os item a) e c) foram esboçados em figuras e convidamos o leitor a reproduzi-las.



2Problema S)eja $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores positivos de $n \in \mathbb{N},\ \ n > 0$. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\sigma(10) &= 1 + 2 + 5 + 10 = 18\\ \sigma(11) &= 1 + 11 = 12\end{aligned}$$

Um número n é chamado perfeito quando $\sigma(n) = 2n$.

a) Se p é primo mostre que $\sigma(p^n) = (1 - p^{n+1})/(1 - p)$.

b) Mostre que se $2^k - 1$, $k > 1$, é um número primo então $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ é perfeito e dê exemplos de números perfeitos.

c) Mostre que um número natural da forma $n = p^2q^2$, sendo p e q primos distintos, nunca é perfeito.

Solução: **[Márcio Antonio Ferreira Belo Filho]**

a) Sendo p um primo temos que: $\sigma(p^n) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n$, pois os divisores de número p^n são p^{n-k}, $0 \leq k \leq n$. Se multiplicarmos a soma por $\frac{p-1}{p-1} = 1$ teremos

$$\begin{aligned}\sigma(p^n) &= \frac{(p-1) + (p^2 - p) + \cdots + (p^n - p^{n-1}) + (p^{n+1} - p^n)}{p-1}\\ &= \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} = \frac{1 - p^{n+1}}{1 - p}.\end{aligned}$$

b) Sendo $2^k - 1$ primo temos

$\sigma(2^{k-1}(2^k-1)) = 1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}+(2^k-1)(1+2+2^2+\cdots+2^{k-1})$.

Como $1+2+2^2+\cdots+2^{k-1} = 2^k-1$ temos:

$$\sigma(2^{k-1}(2^k-1)) = 2^k-1+(2^k-1)(2^k-1) = (2^k-1)2^k.$$

Portanto se $n = 2^{k-1}(2^k-1)$ então $\sigma(n) = 2^k(2^k-1) = 2n$ e o item b) está provado.

c) Sendo p e q primos distintos temos: $\sigma(p^2q^2) = 1+p+p^2+q+q^2+pq+p^2q+pq^2+p^2q^2$. Temos duas possibilidades: ambos são ímpares ou um deles é igual a 2 (único primo par).

Se ambos são ímpares, todos os divisores serão ímpares e com há 9 divisores temos que a soma é ímpar e por ser perfeito a soma dos divisores tem que ser par. Portanto p^2q^2 não pode ser perfeito se p e q são primos ímpares distintos.

Se $p = 2$ temos 6 divisores pares e 3 divisores ímpares e portanto a soma é um número ímpar. Assim p^2q^2 nunca é perfeito.

3Problema D)ada a circunferência c de raio r e centro O e um ponto $P \neq O$, definimos o simétrico de P com relação a c como o ponto P' da semi reta OP tal que $OP.OP' = r^2$. Dizemos que P e P' são simétricos com relação a c. A função que transforma cada ponto P no seu simétrico P' é chamada de inversão. Faça os itens abaixo, justificando a resposta.

a) Mostre uma construção geométrica para obter o ponto P' a partir do ponto P. Considere todas as situações.

b) Dado o triângulo ABO e os pontos A' e B' simétricos a A e B respectivamente, mostre que $O\hat{A}B = O\hat{B}'A'$ e $O\hat{B}A = O\hat{A}'B'$.

c) Mostre que a inversão transforma uma reta que não passa por O em uma circunferência que passa por O.

Solução: [Saulo Cavalcante dos Reis]

a) Para um ponto P no interior de c. Encontre um ponto A na circunferência tal que $AP \perp OP$. Tem-se o triângulo OPA, sendo $A\hat{O}P = \alpha$. Trace a reta tangente a circunferência em A e encontre o ponto comum a esta reta e à reta OP. Tal ponto é P'. Tal método é justificado da seguinte maneira:

- No $\triangle OPA$, $\cos\alpha = OP/r$.
- No $\triangle OP'A$, $\cos\alpha = r/OP'$. Logo $OP \times OP' = r^2$.

Para um ponto P no exterior de c, trace uma reta que passe por P e seja tangente a circunferência num ponto que chamarei de A. Agora faça um segmento AP' tal que $AP' \perp OP$. O ângulo $A\hat{O}P = \alpha$. Pelo mesmo procedimento obtemos $\cos\alpha = r/OP = OP'/r$. Logo $OP \times OP' = r^2$.

Para um ponto P na circunferência tomamos $P' = P$, já que $OP = r$.

b) Suponha que A e B não pertençam a circunferência. Da relação de simetria temos $OA \times OA' = OP \times OP' = r^2$ e como $A'\hat{O}B = A\hat{O}B'$, os triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle A'OB'$ são semelhantes e portanto as relações estão estabelecidas.

c) (**Solução da comissão.**) Seja l a reta que não passa pelo centro O da circunferência c, e $A' \in l$ o pé da perpendicular a l que passa por O. Seja A o simétrico de A' em relação a c. Vamos mostrar que a reta l é transformada na circunferência, c_0, que passa por O e A com diâmetro OA. Seja $B' \in l$ e B seu simétrico. Pelo item a) temos que $O\hat{B}A = O\hat{A}'B' = 90^o$, assim OAB é um triângulo retângulo e logo está inscrito numa semi - circunferência de diâmetro AO. Logo $B \in c_0$.

4Problema D)ado o conjunto $A = \{1, 2\}$, uma *amostra* (com reposição) com n elementos de A é uma expressão da forma $[x_1, x_2, \ldots x_n]$ onde $x_i \in A$ e duas amostras são consideradas iguais caso elas possuam a mesma quantidade de 1's e 2's, ou seja, a ordem dos elementos não importa, de modo que, por exemplo, $[1, 1, 1, 2] = [1, 2, 1, 1]$. Faça os ítens abaixo, justificando sua resposta.

i) Quantas amostras com n elementos do conjunto A podem ser obtidas?

ii) Se $B = \{1, 2, 3\}$ quantas amostras com n elementos do conjunto B podem ser obtidas?

iii) Se $B = \{1, 2, 3, 4, \cdots, k-1, k\}$ quantas amostras com n elementos do conjunto B podem ser obtidas?

Solução: [**Márcio Antonio Ferreira Belo Filho**]

i) $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ é uma amostra do conjunto A com n elementos. Logo podemos ter um número 1 nessa amostra, 2 números 1 nessa amostra, ..., até n números 1 na amostra, contando também que não haja nenhum número 1 temos $n+1$ formas de amostragem.

ii) Nessa amostra faremos o seguinte: Caso tivermos um número 1 teremos $n-1$ números para completar com 2 e 3, logo, temos n maneiras para que não haja a formação de amostras iguais.

Caso tivermos 2 números 1 teremos $n-2$ números para completar com 2 e 2, logo, teremos $n-1$ maneiras para que não haja a formação de amostras iguais.

Assim sucessivamente até termos $n-2$ números 1 com 3 formas de completar, $n-1$ com duas formas de completar e n números 1 que é uma forma de amostra.

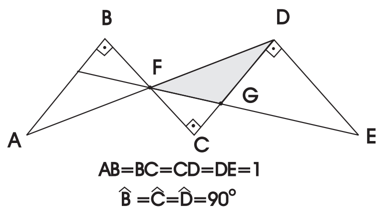
Não esquecer que pode não haver nenhum número 1, havendo portanto $n+1$ formas de amostras (item i)). Logo a soma das amostras é:

$$S_A = n+1+n+n-1+n-2+\cdots+3+2+1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

iii) Façamos agora de uma maneira diferente. Temos que com a amostra $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ podemos fazer um x_q (k números diferentes), portanto temos a possibilidade de fazer k^n amostras, contando inclusive as iguais. Para a retirar as iguais podemos pensar no mesmo modo dos casos i) e ii). Logo temos para um número k de números temos:

$$\text{N}^o \ \textit{de amostras} \ = \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)}{n!}.$$

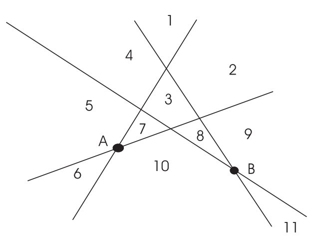
5Problema N)a figura abaixo tem-se $AB = BC = CD = DE = 1$ e $\hat{B} = \hat{D} = \hat{C} = 90^o$. Calcule a área do triângulo FDG.



Solução: [Danilo Vieira Castejan, Guilherme Rodrigues Salermo]

Temos que a área de $\triangle BDC = \frac{DC.BC}{2} = \frac{1}{2}$. Sendo $BA \parallel CD$ e de mesma medida então $ABDC$ é um paralelogramo e então F é ponto médio de BC e FC mede $1/2$. Como os triângulos BDF e DFC têm dois lados congruentes e ângulos que são suplementares adjacentes, suas áreas são iguais e portanto $A_{DFC} = 1/2 \times A_{BDC} = 1/4$. O ponto G é baricentro já que é o encontro das medianas EF e DC do triângulo ADE e então $GC = DC/3 = 1/3$. A área do triângulo FCG é $(1/2 \times 1/3)/2 = 1/12$. A área do triângulo FGD é a diferença das áreas de $\triangle DFC$ e $\triangle FCG$. Temos $1/4 - 1/12 = 1/6$. A área do $\triangle FDC$ é $1/6$.

6Problema A) figura abaixo mostra uma configuração geométrica. Por dois pontos distintos A e B passam duas retas por cada ponto, dividindo o plano em 11 regiões, sendo três limitadas e oito não limitadas.



Como base nesta informação faça os ítens abaixo (desenhos deverão ser a mão livre), justificando sua resposta.

i) Dados dois pontos distintos A e B, trace três retas por A e três retas por B e obtenha 18 regiões.

ii) Dados dois pontos distintos A e B, trace três circunferências por A e duas retas pelo ponto B e obtenha 16 regiões.

iii) Dados três pontos distintos A, B e C, trace três retas por A, três retas por B e duas retas por C. Qual é o número máximo de regiões que podem ser obtidas nesta situação?

Solução: [Daniel Augusto B. de Oliveira, Danilo B. do Nascimento]

i) Para fazê-lo são necessários dois pares de retas paralelas entre si e de forma que limite o número de regiões solicitadas.

ii) Com duas retas dividimos o plano em 4 regiões, se traçarmos 3 circunferências, uma dentro da outro e todas três tangentes num ponto A, dividiremos cada uma das 4 regiões anteriores em 4 outras regiões totalizando 16 regiões.

Outra possibilidade é traçar três circunferências sendo duas tangentes num ponto pertencente a terceira e duas retas tendo intersecção no exterior das três circunferências e tendo intersecção com cada uma das circunferências em 2 pontos.

iii) Para obtermos o número máximo possível de regiões, é necessário que consigamos com que as retas se cruzem o máximo de vezes possível, para tal, devemos traçar ângulos menores e estabelecendo C entre A e B de forma que C possa dividir ainda mais as regiões estabelecidas e sempre o maior número possível de regiões. Traçamos então 35 regiões.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 4, 2003, 49-52

Problemas Propostos

Nesta seção propomos alguns problemas de níveis 1, 2 e 3 cujas soluções serão publicadas no próximo número. Contamos com a sua contribuição com soluções e sugestões de problemas para o próximo número.

Nível 1

Problema 1. Calcule a soma dos dígitos do produto $2^{2003}.5^{2004}$ escrito na forma decimal.

Problema 2. Para quais números reais a, b, c, ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a + b + c \neq 0$) vale a igualdade

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}?$$

Problema 3. Mostre que em qualquer quadrilátero convexo o quociente do seu perímetro pela soma de suas diagonais é maior que 1 e menor que 2.

Nível 2

Problema 1. Sejam A, B e C dígitos distintos, é possível encontrar os três dígitos de modo que os números ABC e CBA sejam divisíveis por 7?

Problema 2. Resolva o seguinte sistema de equações:
$x^3 + x^3 * y^3 + y^3 = 9$ e $x + xy + y = 0$.

Problema 3. Dado um trapézio $ABCD$, $\hat{A} = \hat{B} = 60^o$ construa triângulos equiláteros APC, DQC e DRB, onde P pertence ao semi-plano determinado por AC diferente daquele que contêm AB, Q pertence ao semi-plano determinado por DC diferente daquele que contêm AB e R pertence ao semi-plano determinado por DB diferente daquele que contêm AB.

Nível 3

Problema 1. Seja $ABCD$ um quadrilátero com $AD = BC$ e $\hat{A}+\hat{B} = 120^o$. Três triângulos equiláteros ACP, DCQ e DBR são construídos nos semi-planos, determinados por AC, DC e DB, que não contem AB. Prove que os três vértices P, Q e R são colineares.

Problema 2. Seja $P(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros e $P(21) = 17$, e $P(32) = -247$ e $p(37) = 33$. Prove que se $P(N) = N + 51$ para algum inteiro N, então $N = 26$.

Problema 3. Determine o valor da expressão.
$f(\frac{1}{2003})+f(\frac{2}{2003})+\ldots+f(\frac{2002}{2003})+f(\frac{2003}{2003})+f(\frac{2003}{2002})+f(\frac{2003}{2001})+\ldots+f(\frac{2003}{1})$,
supondo $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

Soluções dos Problemas Propostos na Revista 03

Nível 1

Problema 1. O sólido ao lado é o octaedro regular. Ele é formado por duas pirâmides de base quadrada unidas pelas suas bases. Qual das seguintes figuras representa o octaedro regular planificado?

Solução. Um octaedro regular é formado por oito triângulos equiláteros cogruentes. Cada vértice do octaedro é a interseção de quatro arestas do mesmo.

Construa cada uma das figuras usando régua e compasso. Na figura (a) o vértice C é a interseção de no mínimo cinco arestas (quando se faz CB=CD). Assim não se pode formar o octaedro.

Na figura (c) os pontos A e G são a interseção de no mínimo quatro arestas. Dobre os triângulos com vértice comum A, fazendo AB=AJ, forma-se uma pirâmide de base quadrada com vértices A,B,C,D,I e J. Existe uma simetria na figura com relação a ID, assim fazendo GH=GF, forma-se também uma pirâmide de base quadrada com vértices G,F,E,D,I e H. Pode-se formar desta maneira o octaedro regular.
(Observação: na revista 02 a pergunta era "Qual das seguintes figuras representa o tetraedro regular planificado?" a pergunta correta é "Qual das seguintes figuras representa o octaedro ...").

Problema 2. Qual é o menor número primo que é um fator da soma

$$1999^{2002} + 2001^{2002}.$$

Solução. Note que $1999^2 = 3996001$, 1999 elevado a qualquer número par é um número que tem 1 como algarismo da unidade. E 2001 elevado a qualquer número é um número que tem 1 como algarismo da unidade. Então a soma tem 2 como algarismo da unidade. Logo o menor número primo que é um fator da soma é o 2.

Nível 2

Problema 1. Dois retângulos idênticos ABCD e EFGH, de dimensões 24×12, são sobrepostos de tal maneira que F coincide com A e H com C, como mostra a figura ao lado. Achar a área da região pontilhada.

Solução. Seja I a interseção de BC com FG e J a interseção de AD com EH. Os triângulos $\triangle ABI$ e $\triangle HGI$ são congruentes pelo caso LAA ($AB = HG = 12, A\hat{I}B = H\hat{I}G$ e $A\hat{B}I = H\hat{G}I = 90^o$). Os triângulos $\triangle FEJ$ e $\triangle CDJ$ também são congruentes pelo caso LAA ($FE = CD = 12, F\hat{E}J = C\hat{D}J = 90^o$ e $F\hat{J}E = C\hat{J}D$).

Observe que $H\hat{I}G = J\hat{F}I$, pois são ângulos correspondentes. Mas $H\hat{I}G + G\hat{H}I = J\hat{F}I + J\hat{F}E = 90^o$, então $G\hat{H}I = J\hat{F}E$. Como $FE = HG$ os triângulos $\triangle FEJ$ e $\triangle HGI$ são congruentes. Logo $AI = AJ = JC = CI$, portanto o quadrilátero AJCI é um losango.

Seja M o ponto de interseção das diagonais (AC e JI) do losango. Como as diagonais de um losango se interseptam nos pontos médios formando ângulos de 90^o, $A\hat{M}I = 90^o$, $AM = \frac{AC}{2}$ e $IM = \frac{IJ}{2}$. Do triângulo $\triangle AGC$ temos,
$AC^2 = AG^2 + GC^2 \Longrightarrow AC^2 = 24^2 + 12^2 = 720.$

Os triângulos $\triangle AGC$ e $\triangle AMI$ são semelhantes, então,
$\frac{AG}{AM} = \frac{CG}{IM} \Longrightarrow \frac{24}{AM} = \frac{12}{IM} \Longrightarrow IM = \frac{AM}{2}$ ou $IM = \frac{AC}{4}$.

A área A_1 do triângulo $\triangle AMI$ é:
$A_1 = \frac{AM.IM}{2} = \frac{AC^2}{16} = \frac{720}{16} = 45.$

Os triângulos $\triangle AMI$, $\triangle CMI, \triangle AMJ$ e $\triangle CMJ$ são congruentes pelo caso LAL. Então, a área A_2 do losango AJCI é:
$A_2 = 4.A_1 \Longrightarrow A_2 = 180.$

A área da região pontilhada é duas vezes a área do retâgulo ABCD menos a área do losango.

$A = 2.(24.12) - 180 = 396.$

Problema 2. A fração $\frac{**6*}{***3*}$ contém os 9 dígitos 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 e é igual a $\frac{1}{2}$. Encontre, se possível, os dígitos apropriados.

SOLUÇÃO. Considere assim a fração $\frac{\text{ab6c}}{\text{def3g}}$, queremos encontrar a, b, c, d, e, f e g, tal que, 2.ab6c = def3g.Temos que 2.c > 10, pois caso contrário o algarismo da dezena do denominador seria 2, e não 3.

- Suponha c = 7, então 2.c = 14, logo g = 4. Para esta suposição de c a única possibilidade é b = 2, logo f = 5. Resta determinar a,d, e e, os números restantes são 1,8 e 9, então a = 9, d = 1 e e = 8. Temos, $\frac{9267}{18534} = \frac{1}{2}$.
- Suponha c = 8, então 2.c = 16, mas teríamos g = 6 o que não pode acontecer.
- Suponha c = 9, então 2.c = 18, logo g = 8. A única possibilidade é b = 2, portanto f = 5. Resta determinar a,d e e, os números restantes são 1,4 e 7. Então a = 7, d = 1 e e = 4. Temos $\frac{7269}{14538} = \frac{1}{2}$.

Nível 3

Problema 1. No paralelogramo ABCD, E e F são pontos médios dos lados $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ respectivamente. G é o ponto de interseção de $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$. Expresse a razão entre as áreas do triâgulo EFG e o triângulo BCE, usando a menor possibilidade destes números.

SOLUÇÃO. Considere que a área do paralelogramo ABCD seja 1. Então a área do triângulo $\triangle BCE$ é $\frac{1}{4}$. Sejam H e I os pontos médios de $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, e seja J o ponto de interseção de $\overline{EI}$ e $\overline{BF}$ e K o ponto de interseção de $\overline{IE}$ e $\overline{FH}$.

Já que ABCD é um paralelogramo, então AFHB é também um paralelogramo portanto J é ponto médio de $\overline{IK}$. Os triângulos $\triangle GFA$ e $\triangle GJE$ são semelhantes ($A\hat{G}F = E\hat{G}J$ e $G\hat{F}A = G\hat{J}E$), assim $AG : EG = AF : EJ$. Mas

$$AF : EJ = \frac{1}{2}AD : \frac{3}{4}AD = \frac{2}{3}.$$

Dêsse modo, área do $\triangle GEF$ é três quintos a área do $\triangle EAF$, mas a área de $\triangle EAF$ é $\frac{1}{8}$. Portanto a área do $\triangle GEF$ é

$$\frac{3}{5}.\frac{1}{8} = \frac{3}{40}.$$

Em consequência, a razão em questão é

$$\frac{3}{40} : \frac{1}{4} = \frac{3}{10}.$$

Problema 2. Seja f um polinômio com coeficientes inteiros e $f(0) = 2001$ e $f(1) = 2003$. Prove que f não tem raízes inteiras.

SOLUÇÃO. Seja $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ um polinômio tal que $f(0) = 2001$ e $f(1) = 2003$. Então $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + 2001$. Se f têm raiz racional $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbf{Z}$ então, $p|2001$ e $p - mq|f(m)$ para todo $m \in \mathbf{Z}$. Tomando $m = 1$ temos, $p - q|2003 \Longrightarrow p - q = \pm 2003$ ou $p - q = \pm 1$.

Para encontrar as raízes inteiras de f faz-se $q = 1 \Longrightarrow p = 2004, p = -2002, p = 2$ ou $p = 0$. Como $f(0) = 2001$, 2, 2004 e -2002 não dividem 2001, f não têm raízes inteiras.

Problema 3. Seja $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ uma função satisfazendo

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2. \tag{1.8}$$

a) Mostre que f é injetora;
b) mostre que $f(0) = 0$;
c) mostre que $f(x^2) = f(x)^2$;
d) mostre que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para $x \geq 0$ e $y \in \mathbf{R}$.
e) Encontre todas as funções $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que satisfazem (1).

SOLUÇÃO. a) f é injetora pois,
$f(y_1) = f(y_2) \Longrightarrow x^2 + f(y_1) = x^2 + f(y_2) \Longrightarrow f(x^2 + f(y_1)) = f(x^2 + f(y_2)) \Longrightarrow y_1 + f(x)^2 = y_2 + f(x)^2 \Longrightarrow y_1 = y_2$.

b) Tem-se que,

$$f(x^2 + f(y)) = f((-1.x)^2 + f(y)) = y + [f(-1.x)]^2$$

e

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Logo, $f(-1.x)^2 = f(x)^2 \Longrightarrow [f(-1.x) - f(x)].[f(-1.x) + f(x)] = 0$. Então $f(-1.x) = f(x)$ ou $f(-1.x) = -f(x)$. Fazendo $x = 0$, tem-se $f(0) = -f(0) \Longrightarrow f(0) = 0$.

c) Observe que $f(x^2) = f(x^2 + f(0)) = 0 + f(x)^2 \Longrightarrow f(x^2) = f(x)^2$.

d) Temos que $f(0+f(y)) = y + f(0) \Longrightarrow f(f(y)) = y$. Então para $x \geq 0$, $f(x+y) = f((\sqrt{x})^2 + f(f(y))) = f(y) + f(\sqrt{x})^2 = f(y) + f((\sqrt{x})^2) = f(y) + f(x)$.

e) Seja $x \in \mathbf{R}$ tal que $x > 0 \Longrightarrow f(x) > 0$, pois $f(x) = f(\sqrt{x}^2) = f(\sqrt{x})^2 \geq 0$. Temos que $f(1) = f(1 + f(0)) = 0 + f(1)^2 \Longrightarrow f(1) = f(1)^2 \Longrightarrow f(1) = 1$. Então para $x \in \mathbf{Z}$ temos $f(x) = f(x.1) = f(1 + ... + 1) = f(1) + ... + f(1) = x.f(1) = x$, logo $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{Z}$.

Suponha $x > 0$ então $f(x) > 0 \Longrightarrow f(f(x)) > f(x) \Longrightarrow x > f(x)$, o que é um absurdo então $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{R}^+$. Como $f(x) = -f(-x)$, $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

Bibliografia

[1] *Mathematics Teacher, National Council of Teacher of Mathematics*, Volume 93, Number 1, 2 and 7, 2000.

[2] Losada, M. F.. *Problemas y Soluciones*, 1987 - 1991, Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidade Antonio Nariño, Bogotá, Colombia. 1994

[3] Shklarsky, D. O., Chentzov, N.N. and Yaglom,I.M. *The URSS Olympiad problem book* , Dover Publications Inc., 1994.

[4] Wagner, E. e Moreira, C.G.T. *10 Olimpíadas Iberoamericanas de Matemática*, Organización de Estados Iberoamericanos, 1994.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 4, 2003, 55-71

A Seqüência de Fibonacci

Gisele de Araújo Prateado Gusmão[1]

Introdução

Dos séculos XII a XIV, com a queda do feudalismo, floresceu na Europa o comércio. Existiam na época grandes centros comerciais, entre eles estava a cidade de Pisa (Itália), onde nasceu Leonardo de Pisa (1175 - 1250).

Leonardo de Pisa, ficou conhecido como Fibonacci, contração de filius de Bonacci ou filho de Bonacci. Seu pai foi um comerciante e devido a isso Fibonacci conheceu grandes centros comerciais da Europa, África e Ásia. As atividades do pai despertaram em Fibonacci um grande interesse pela aritmética, e com as viagens ele entrou em contato com a matemática desenvolvida pelos orientais e árabes.

Fibonacci escreveu seu famoso livro Liber Abaci, em 1202, que tem grande importância pelo fato de introduzir, na Europa, os algarismos indo - arábicos. Neste livro Fibonacci explica a leitura e a escrita destes novos algarismos e traz vários problema de álgebra, geometria e também problemas envolvendo juros, permuta de mercadorias e moeda.

Talvez o mais famoso destes problemas seja o problema dos coelhos [1], que deu origem à seqüência de Fibonacci. Existe hoje uma literatura muito grande a respeito da seqüência de Fibonacci e suas aplicações nas mais diversas áreas, tais como a filotaxia ou as artes.

É surpreendente as várias propriedades da seqüência de Fibonacci, e é sobre algumas destas propriedades que vamos tratar neste artigo.

[1]Agradeço à aluna Flávia, do Curso de Matemática, pelo excelente trabalho de digitação no LaTeX.

1.1 A Seqüência de Fibonacci

Seja

$$u_1, u_2, ..., u_n, ... \tag{1.1}$$

uma seqüência tal que

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \text{ para } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 2. \tag{1.2}$$

Seqüências deste tipo são chamadas de *recorrentes*, e a equação (1.2) é chamada *equação de recorrência*.

A equação (1.2) define várias seqüências na medida em que variamos u_1 e u_2. Por exemplo:

$$-2, 4, 2, 6, 8, 14, \ldots$$

$$-1, 0, -1, -1, -2, -3, \ldots.$$

Para se determinar unicamente a seqüência (1.1) não basta a equação (1.2), é preciso mais algumas condições. Os termos de ordem 1 e 2 não são calculados usando a equação de recorrência pois não possuem dois termos antecessores. Logo para determinar unicamente os termos de (1.1) precisamos de u_1, u_2 e a equação (1.2).

A seqüência

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

é a ***seqüência de Fibonacci***, seus termos são chamados ***números de Fibonacci***.

A seguir demonstraremos algumas das propriedades gerais desta seqüência.

1.2 Propriedades Gerais

1. A soma dos n primeiros termos da seqüência de Fibonacci é dada por

$$u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n = u_{n+2} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.3}$$

Demonstração. Temos que $u_1 = u_3 - u_2, u_2 = u_4 - u_3, u_3 = u_5 - u_4, ..., u_{n-1} = u_{n+1} - u_n, u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$. Somando os membros destas igualdades, encontramos $u_1+u_2+...+u_{n-1}+u_n = u_{n+2}-u_2$. Como $u_2 = 1$, temos

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_{n+2} - 1. \qquad \square$$

2. A soma dos termos de ordem ímpar da seqüência de Fibonacci é dada por

$$u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n-1} = u_{2n} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \qquad (1.4)$$

3. A soma dos termos de ordem par da seqüência de Fibonacci é dada por

$$u_2 + u_4 + ... + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \qquad (1.5)$$

4. A soma alternada da seqüência de Fibonacci é dada por

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1}u_n = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*. \qquad (1.6)$$

   A demonstração da propriedade 2 é semelhante a demonstração da propriedade 1, as propriedades 3 e 4 são provadas usando as propriedades 1 e 2.

5. A soma dos quadrados dos n primeiros termos da seqüência de Fibonacci é dada por

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_{n-1}^2 + u_n^2 = u_n u_{n+1} \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*. \qquad (1.7)$$

   Demonstração. Notemos primeiro que para $n \geq 2$ temos que

$$u_n u_{n+1} - u_{n-1}u_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) = u_n^2.$$

   Logo $u_1^2 = u_1u_2, u_2^2 = u_2u_3 - u_1u_2, u_3^2 = u_3u_4 - u_2u_3, ..., u_{n-1}^2 = u_{n-1}u_n - u_{n-2}u_{n-1}, u_n^2 = u_nu_{n+1} - u_{n-1}u_n$. Somando os membros desta igualdade encontramos

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_{n-1}^2 + u_n^2 = u_n u_{n+1}. \qquad \square$$

   Vamos provar as próximas propriedades usando o *Princípio de Indução.*

6.
$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*, n > 1. \tag{1.8}$$

Demonstração. Para $n = 2$ temos $u_{m+2} = u_1 u_m + u_2 u_{m+1} = u_m + u_{m+1}$ que é equação de recorrência da seqüência de Fibonacci. Suponhamos que (1.8) é verdadeira para $n = k$ e $n = k+1$, vamos provar que vale para $n = k+2$.

$$\begin{aligned} u_{m+k+2} &= u_{m+k+1} + u_{m+k} \\ &= u_k u_m + u_{k+1}u_{m+1} + u_{k-1}u_m + u_k u_{m+1} \\ &= (u_k + u_{k-1})u_m + (u_{k+1} + u_k)u_{m+1} \\ &= u_{k+1}u_m + u_{k+2}u_{m+1}. \qquad \square \end{aligned}$$

Fazendo $n = m$ temos que

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > 1,$$

de onde concluímos que u_{2n} é divisível por u_n. Mais adiante provaremos que $n \mid m \Leftrightarrow u_n \mid u_m$.

Pode-se mostrar ainda que a diferença dos quadrados de dois termos da seqüência de Fibonacci, cujos índices diferem de 2, é um termo da seqüência. Observe que

$$\begin{aligned} u_{2n} &= (u_{n-1} + u_{n+1})u_n \\ &= (u_{n-1} + u_{n+1})(u_{n+1} - u_{n-1}) \\ &= u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Assim provamos

7.
$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*, n > 1. \tag{1.9}$$

8.
$$u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*, n > 1. \tag{1.10}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} u_{3n} = u_{n+2n} &= u_{n-1}u_{2n} + u_n u_{2n+1} \\ &= u_{n-1}(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + u_n(u_n u_n + u_{n+1}u_{n+1}) \\ &= u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3. \qquad \square \end{aligned}$$

9.
$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1}, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*, n > 1. \tag{1.11}$$

Demonstração. Vamos provar usando o Princípio de Indução. Para $n = 2$ temos
$$u_2^2 = u_1 u_3 + (-1)^3.$$

Suponhamos que a fórmula (1.11) é verdadeira para $n = k$, vamos provar que vale para $n = k + 1$, isto é, $u_{k+1}^2 = u_k u_{k+2} + (-1)^{k+2}$. Somando $u_k u_{k+1}$ em (1.11) para $n = k$ obtemos

$$\begin{aligned} u_k^2 + u_k u_{k+1} &= u_{k-1}u_{k+1} + u_k u_{k+1} + (-1)^{k+1} \\ u_k(u_k + u_{k+1}) &= (u_{k-1} + u_k)u_{k+1} + (-1)^{k+1} \\ u_k u_{k+2} &= u_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} \\ u_{k+1}^2 &= u_k u_{k+2} + (-1)^{k+2}. \qquad \square \end{aligned}$$

Teorema 1 (V. E. Hogatt)**.** *Todo número natural pode ser escrito como soma de distintos números de Fibonacci.*

Demonstração. Para qualquer $k \in \mathbb{N}^*$ existe um único natural n tal que

$$u_{n-1} < k \leq u_n.$$

Vamos provar o teorema por indução em n. Para $n = 1, k \leq u_1 = 1$ e a propriedade está satisfeita. Suponhamos que para $n \geq 2$ os inteiros $k \leq u_n$ podem ser escritos como soma de distintos números de Fibonacci. Vamos mostrar que esta propriedade continua verdadeira para todo inteiro k tal que $u_n < k \leq u_{n+1}$. Como

$$u_n < k \leq u_{n+1} \Rightarrow 0 < k - u_n \leq u_{n+1} - u_n = u_{n-1}.$$

Pela hipótese de indução, temos que $k - u_n$ pode ser escrito como soma de distintos números de Fibonacci e nenhuma parcela pode ser igual a u_n. Logo k também tem esta propriedade e assim o teorema está provado

1.3 Exercícios

1) *Prove as seguintes propriedades dos números de Fibonacci:*

a) $u_1u_2 + u_2u_3 + ... + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

b) $u_1u_2 + u_2u_3 + ... + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

c) $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + ... + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3)$ $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

d) $u_1 + 2u_2 + 3u_2 + ... + nu_n = nu_{n+2} - u_{n+3} + 2 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*$.

2) Determine todas as progressões aritméticas de 3 termos da seqüência de Fibonacci.

3) Mostre que não existem 4 termos da seqüência de Fibonacci em progressão aritmética.

4 Determine todas as progressão aritmética de números inteiros onde nenhum de seus termos é igual a algum termos da seqüência de Fibonacci.

5) **(19ª Olimpíada Brasileira de Matemática.)** Seja

$$V_n = \sqrt{u_n^2 + u_{n+2}^2}, \quad n \geq 1.$$

Mostre que, para todo n inteiro positivo, V_n, V_{n+1}, V_{n+2} são lados de um triângulo de área $\frac{1}{2}$.

Conjectura: *Existem apenas* 5 *números de Fibonacci que são números triangulares.*

1.4 Fórmula de Binet - Termo geral da seqüência de Fibonacci

Até agora a seqüência de Fibonacci foi representada por uma equação de recorrência (1.2). Encontraremos a expressão de u_n envolvendo apenas o índice n.

Primeiro vamos encontrar as seqüências que satisfazem a equação de recorrência $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, e dentre as soluções aquelas que satisfazem $a_1 = a_2 = 1$.

Uma equação cuja incógnita é uma seqüência (a_n) e que relaciona k termos, $a_n, a_{n+1}, ... ,a_{n+k-1}$ é chamada de *equação em diferenças.*

O próximo lema nos dá a solução de equações em diferenças da forma

$$a_n + pa_{n-1} + qa_{n-2} = 0 \tag{1.12}$$

onde p e q são constantes e $q \neq 0$.

De maneira geral uma equação em diferenças linear é da forma

$$f_k(n)x_{n-k} + f_{k-1}(n)x_{n-k+1} + f_{k-2}(n)x_{n-k+2} + ... + f_0(n)x_n = 0$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $f_0, f_1, ..., f_k$ são funções definidas em $\mathbb{N}$. Dizemos que a equação em diferenças linear tem ordem k se f_0 e f_k são diferentes da função nula. Em particular a equação (1.12) é uma equação em diferenças linear de ordem 2 com coeficientes constantes pois

$$f_2(n) = q, f_1(n) = p \quad \text{e} \quad f_0(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n > 2.$$

Lema 1. *A equação em diferença linear dada por*

$$x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0 \tag{1.13}$$

com $x_1 = a_1$ e $x_2 = a_2$, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, possui uma única solução.

Demonstração. Como x_1 e x_2 foram dados, usando a equação (1.13) podemos obter um único valor para x_3, fazendo $n = 3$, pois

$$x_3 = -px_2 - qx_1 = -pa_2 - qa_1 = a_3.$$

Agora como x_2 e x_3 são conhecidos podemos determinar um único valor para x_4 de forma análoga, fazendo $n = 4$

$$x_4 = -px_3 - qx_2 = -pa_3 - qa_2 = a_4.$$

Pelo Princípio de Indução, suponhamos que x_n esteja determinado de forma única para $0 \leq n \leq k$. Logo, x_{k+1} também está determinado de forma única pois

$$x_{k+1} = -px_k - qx_{k-1} = -pa_k - qa_{k-1} = a_{k+1}.$$

Portanto (1.13) possui uma única solução. □

No próximo teorema vamos relacionar a equação (1.13) com a equação $r^2 + pr + q = 0$ cujas raízes são distintas e iguais a r_1 e r_2.

Teorema 2. *Se a equação $r^2 + pr + q = 0$ possui raízes r_1 e r_2 distintas, a seqüência $a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$ onde $n \in \mathbb{N}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, é a solução de*

$$x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n > 2. \tag{1.14}$$

Demonstração. Temos que

$$a_{n-1} = c_1(r_1)^{n-1} + c_2(r_2)^{n-2} \quad \text{e} \quad a_{n-2} = c_1(r_1)^{n-2} + c_2(r_2)^{n-2}.$$

Substituindo em (1.14), temos

$$c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n + p[c_1(r_1)^{n-1} + c_2(r_2)^{n-1}] + q[c_1(r_1)^{n-2} + c_2(r_2)^{n-2}] =$$
$$c_1(r_1)^{n-2}[r_1^2 + pr_1 + q] + c_2(r_2)^{n-2}[r_2^2 + pr_2 + q] = 0.$$

Portanto $a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ é solução de (1.14). □

A equação de recorrência da seqüência de Fibonacci é

$$x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0 \tag{1.15}$$

Logo a equação associada é $r^2 - r - 1 = 0$ e suas raízes são $r = (1 \pm \sqrt{5})/2$.

Pelo Teorema (2),

$$u_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

é solução de (1.15).

Vamos determinar c_1 e c_2 de tal forma que $u_1 = u_2 = 1$.

$$\begin{cases} 1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ 1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $c_1 = 1/\sqrt{5}$ e $c_2 = -1/\sqrt{5}$.

Logo a fórmula geral dos termos da seqüência de Fibonacci é

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad \textbf{\textit{(Fórmula de Binet)}}$$

para todo n inteiro positivo. Fazendo $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ e $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ temos,

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$

para todo n inteiro positivo.

É evidente que fórmulas deste tipo podem ser encontradas também para outras soluções de (1.15).

Como aplicação da Fórmula de Binet vamos mostrar que

$$u_3 + u_6 + u_9 + ... + u_{3n} = \frac{1}{2}(u_{3n+2} - u_2).$$

Temos

$$u_3+u_6+u_9+...+u_{3n} = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^9 - \beta^9}{\sqrt{5}} + ... + \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + ... + \alpha^{3n}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^3 + \beta^6 + \beta^9 + ... + \beta^{3n}).$$

Somando as progressões geométricas temos

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + ... + \alpha^{3n} &= \frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} \\ \beta^3 + \beta^6 + \beta^9 + ... + \beta^{3n} &= \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{\beta^3 - 1}. \end{aligned}$$

E como $r^3 - 1 = 2r$ para $r = \alpha$ ou β temos

$$\begin{aligned} u_3 + u_6 + u_9 + ... + u_{3n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3} - \alpha^3}{2\alpha} - \frac{\beta^{3n+3} - \beta^3}{2\beta}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2} - \alpha^2}{2} - \frac{\beta^{3n+2} - \beta^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\alpha^{3n+2} - \beta^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{2}(u_{3n+2} - u_2) = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}. \qquad \square \end{aligned}$$

Exercício.
Mostre que $u_1^3 + u_2^3 + ... + u_n^3 = \frac{1}{10}(u_{3n+2} + (-1)^{n+1}6u_{n-1} + 5)$.

Teorema 3. *O número de Fibonacci u_n é o inteiro mais próximo do número $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$. E ainda quando n cresce, a distância entre u_n e $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ tende a zero.*

Demonstração. Vamos mostrar que a distância entre u_n e $\dfrac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ é sempre menor que $\dfrac{1}{2}$.

Mas

$$\left|u_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}.$$

Como $|\beta| < 1 \Rightarrow \dfrac{|\beta|^n}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}$. E como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} = 0 \quad \text{temos que} \quad \lim_{n\to\infty} \left|u_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = 0.$$

1.5 Divisibilidade dos Números de Fibonacci

Teorema 4. *Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.*

Demonstração. Suponhamos que $mdc(u_n, u_{n+1}) = d$. A diferença $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$ é também divisível por d. Analogamente, por indução, mostramos que d divide $u_{n-2}, u_{n-3}, ..., u_2$ e u_1. Como $u_1 = u_2 = 1$ temos que $d = 1$. □

Teorema 5. *Se n é divisível por m, então u_n é divisível por u_m, ou melhor, $m|n \Rightarrow u_m|u_n$.*

Demonstração. Por hipótese $n = km$. Fazendo indução em k, temos para $k = 1 \Rightarrow n = m \Rightarrow u_m = u_n$. Suponhamos que é verdade quando $n = km$ e vamos mostrar que vale para $n = (k+1)m$. Sabemos que

$$\begin{aligned} u_{n+m} &= u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}, \quad \text{logo} \\ u_{km+m} &= u_{km-1}u_m + u_{km}u_{m+1} \end{aligned}$$

como $u_m|u_{km}$ e $u_m|u_m$ temos que $u_m|u_{m(k+1)}$. Portanto $m|n \Rightarrow u_m|u_n$. □

A recíproca deste teorema é verdadeira. Para prová-la precisamos dos dois resultado a seguir. Para a demonstração do próximo teorema usaremos a seguinte propriedade do máximo divisor comum "Se $b|c$ então o $mdc(a, b) = mdc(a + c, b)$".

Teorema 6. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ *e* $m = nq_0 + r_1, 0 \leq r_1 < n$ *então* $mdc(u_m, u_n) = mdc(u_n, u_{r_1})$.

Demonstração. Temos que $u_m = u_{nq_0+r_1} = u_{nq_0-1}u_{r_1} + u_{nq_0}u_{r_1+1}$, como $n|nq_0$ temos

$$u_n|u_{nq_0} \Rightarrow u_n|u_{nq_0}u_{r_1+1}.$$

Pelo Teorema 5 temos

$$mdc(u_{nq_0-1}u_{r_1} + u_{nq_0}u_{r_1+1}, u_n) = mdc(u_{nq_0-1}u_{r_1}, u_n).$$

Agora vamos mostrar que $mdc(u_{nq_0-1}u_{r_1}, u_n) = mdc(u_n, u_{r_1})$. Observe que $mdc(u_{nq_0-1}, u_n) = 1$ pois se $d|u_{nq_0-1}$ e $d|u_n \Rightarrow d|u_{nq_0+1}$ e $d|u_{nq_0} \Rightarrow d = 1$. Assim, $mdc(u_{nq_0-1}u_{r_1}, u_n) = mdc(u_n, u_{r_1})$. Portanto

$$mdc(u_m, u_n) = mdc(u_n, u_{r_1}). \qquad \square$$

Corolário 1. $mdc(u_m, u_n) = u_{mdc(m,n)}$.

Demonstração. Pelo algoritmo da divisão temos

$$\begin{aligned}
m = nq_0 + r_1 &\Rightarrow mdc(u_m, u_n) = mdc(u_n, u_{r_1})\\
n = r_1q_1 + r_2 &\Rightarrow mdc(u_n, u_{r_1}) = mdc(u_{r_1}, u_{r_2})\\
r_1 = r_2q_2 + r_3 &\Rightarrow mdc(u_{r_1}, u_{r_2}) = mdc(u_{r_2}, u_{r_3})\\
&\vdots\\
r_{t-2} = r_{t-1}q_{t-1} + r_t &\Rightarrow mdc(u_{r_{t-1}}, u_{r_{t-2}}) = mdc(u_{r_{t-1}}, u_{r_t})
\end{aligned}$$

Se $r_{t-1} = r_tq_t$ então $u_{r_t}|ur_{t-1}$ e assim o $mdc(u_n, u_m) = mdc(u_{r_{t-1}}, u_{r_t}) = u_{r_t}$ mas $r_t = mdc(m, n)$.

Portanto, $mdc(u_m, u_n) = u_{mdc(m,n)}$. $\square$

Teorema 7. $u_m|u_n \Leftrightarrow m|n$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) $u_m|u_n \Rightarrow mdc(u_m, u_n) = u_m$, mas $mdc(u_m, u_n) = u_{mdc(m,n)} \Rightarrow m = mdc(m, n)$ logo $m|n$

($\Leftarrow$) Teorema 5. $\square$

Teorema 8. *Se existe um número de Fibonacci divisível por* m, *então existem infinitos números de Fibonacci divisíveis por* m.

Demonstração. Suponhamos que m divide u_p para algum $p \in \mathbb{N}$. Temos que

$u_{p+p} = u_{p-1}u_p + u_p u_{p+1} \Rightarrow u_{2p} = u_p(u_{p-1} + u_{p+1})$, logo $m|u_p \Rightarrow m|u_{2p}$. Agora $u_{3p} = u_{2p-1}u_p + u_{2p}u_{p+1} \Rightarrow m|u_p$ e $m|u_{2p} \Rightarrow m|u_{3p}$.

Vamos supor que $m|u_{\ell p}$ para todo $\ell \in \mathbb{N}$ onde $1 \leq \ell < k$. Vamos mostrar que $m|u_{kp}$. Sabemos que $u_{kp} = u_{(k-1)p+p} = u_{(k-1)p-1}u_p + u_{(k-1)p}u_{p+1}$. Como $m|u_p$ e $m|u_{(k-1)p}$ temos que $m|u_{kp}$. Portanto $m|u_{kp}$ $\forall\ k \in \mathbb{N}$. $\square$

Agora, após este resultado, será interessante saber se para um dado $m \in \mathbb{N}$ existe pelo menos um número de Fibonacci divisível por m.

Seja $\overline{u}_n$ o resto da divisão de u_n por m e consideremos a seqüência formada pelos pares destes restos:

$$< \overline{u}_1, \overline{u}_2 >, < \overline{u}_2, \overline{u}_3 >, ..., < \overline{u}_n, \overline{u}_{n+1} >, ... \tag{1.16}$$

Por exemplo,

• se $m = 2$ os restos são $1, 1, 0, 1, 1, 0, ...$ e a seqüência (1.16) é:

$$< 1, 1 >, < 1, 0 >, < 0, 1 >, < 1, 1 >, < 1, 0 >, ...$$

• se $m = 3$ os restos são $1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, ...$ e a seqüência (1.16) é:

$$< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 0 >, < 0, 2 >, < 2, 2 >, < 2, 1 >, < 1, 0 >,$$
$$< 0, 1 >, < 1, 1 >, < 1, 2 >, ...$$

• se $m = 4$ os restos são 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, ... e a seqüência (1.16) é:

$$< 1, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 3 >, < 3, 1 >, < 1, 0 >, < 0, 1 >, < 1, 1 >,$$
$$< 1, 2 >,....$$

Definição 1. *Dois pares $< b_1, b_2 >$ e $< c_1, c_2 >$ são iguais se, e somente se $b_1 = c_1$ e $b_2 = c_2$.*

Na divisão por m teremos no máximo m^2 pares distintos. Pelo princípio de Dirichlet [7], nos $m^2 + 1$ primeiros termos da seqüência (1.16) teremos necessariamente dois pares repetidos.

O primeiro termo a seqüência (1.16) que repete é $< 1, 1 >$[8]. Assim, seja $t \in \mathbb{N}$ tal que $< 1, 1 >=< \overline{u}_t, \overline{u}_{t+1} >, 2 \leq t \leq m^2 + 1$. Logo $u_{t+1} \equiv 1 mod\ m$ e $u_t \equiv 1 mod\ m \Rightarrow u_{t-1} = u_{t+1} - u_t \equiv 0 mod\ m \Rightarrow m|u_{t-1}$.

Daí, concluímos que dado qualquer $m \in \mathbb{N}$, existe um $t \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq t \leq m^2 + 1$ e $m|u_{t-1}$. Assim provamos o

Teorema 9. *Seja $m \in \mathbb{N}$ existe pelo menos um número de Fibonacci, entre os $m^2 + 1$ primeiros números, que é divisível por m.*

O resultado acima não diz nada acerca de qual número de Fibonacci será divisível por m. Podemos concluir somente que o primeiro número de Fibonacci divisível por m não é muito grande.

Como $\langle 1, 1\rangle$ é o primeiro par que se repete na seqüência (1.16) temos que a seqüência de restos se repete a partir de u_t, ou seja, esta seqüência é periódica, pois $\langle \overline{u}_1, \overline{u}_2\rangle = \langle \overline{u}_t, \overline{u}_{t+1}\rangle \Rightarrow \overline{u}_t = \overline{u}_1$ e $\overline{u}_{t+1} = \overline{u}_2 \Rightarrow u_t \equiv u_1 mod\ m$ e$u_{t+1} \equiv u_2 mod\ m \ \Rightarrow u_{t+2} \equiv u_3 mod\ m$, logo $\langle \overline{u}_2, \overline{u}_3\rangle = \langle \overline{u}_{t+1}, \overline{u}_{t+2}\rangle$. Continuando este processo até o par $\langle \overline{u}_{t-1}, \overline{u}_t\rangle$ temos $u_{2t-2} \equiv u_{t-1} mod\ m$ e $u_{2t-1} \equiv u_t mod\ m \ \Rightarrow u_{2t} \equiv u_{t+1} mod\ m \ \Rightarrow \overline{u}_{2t} = \overline{u}_{t+1}$ logo $\langle \overline{u}_t, \overline{u}_{t+1}\rangle = \langle \overline{u}_{2t-1}, \overline{u}_{2t}\rangle$. Assim a seqüência (1.16) tem período $t-1$ e a seqüência de restos $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \ldots, \overline{u}_n, \ldots$ também tem período $t-1$.

Por exemplo, para $m = 11$ a seqüência (1.16) é

$$\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 8,2\rangle, \langle 2,10\rangle, \langle 10,1\rangle,$$
$$\langle 1,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, ...$$

e a seqüência de restos é $1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, ...$ e seu período é 10. Assim

$$\begin{aligned}
n &\equiv 1,2,9 \ mod\ 10 \ \Leftrightarrow u_n \equiv 1 \ mod\ 11\\
n &\equiv 3,7 \ mod\ 10 \ \Leftrightarrow u_n \equiv 2 \ mod\ 11\\
n &\equiv 5 \ mod\ 10 \ \Leftrightarrow u_n \equiv 5 \ mod\ 11\\
n &\equiv 6 \ mod\ 10 \ \Leftrightarrow u_n \equiv 8 \ mod\ 11\\
n &\equiv 8 \ mod\ 10 \ \Leftrightarrow u_n \equiv 10 \ mod\ 11\\
n &\equiv 0 \ mod\ 10 \ \Leftrightarrow u_n \equiv 0 \ mod\ 11
\end{aligned}$$

Vemos que para analisar a divisibilidade dos números de Fibonacci basta analisar a divisibilidade de seus índices.

Deixaremos como exercícios alguns critérios de divisibilidade dos números de Fibonacci. Entendendo por critério de divisibilidade, as condições necessárias e suficientes para que um certo número de Fibonacci seja divisível por um número dado. Algumas destas afirmações acima encontram-se demonstradas em [1].

Exercícios

1. (IX Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás.)

Considere o número $0,112358314...$ *onde cada algarismo a partir do terceiro, é obtido da soma dos dois algarismos anteriores a ele, levando em conta apenas o algarismo das unidades e desprezando o das dezenas. Esse número é racional [8].*

2. (3ª Lista de Preparação para a XLII IMO e XV Olimpíada Iberoamericana de Matemática.)

Seja $p > 2$ *um número primo fixado. Dois jogadores A e B escrevem alternadamente uma seqüência de números inteiros de acordo com as seguintes regras:*

- *Inicialmente, A escolhe um número* a_1 *e o escreve, então B escolhe um outro número* a_2 *e o escreve;*
- *Continuando, A escreve o número* $a_3 = a_1 + a_2$ *e B, o número* $a_4 = a_2 + a_3$ *e assim sucessivamente. Cada jogador na sua vez escrevendo a soma dos dois últimos números escritos, isto é,* $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$.

O jogo termina no passo j*, ou seja, quando um jogador escreve* a_j*, se existe um índice* $i, 2 \leq i < j$*, tal que* $a_i - a_j$ *é múltiplo de* p *e, além* $a_{i-1} - a_{j-1}$ *é também múltiplo de* p*. Ganha o jogador que escrever o último número. Determinar qual dos jogadores tem uma estratégia vencedora.*

3. Se um número de Fibonacci a_n *é par então* n *é divisível por 3.*

4. Se número de Fibonacci a_n *é divisível por 3 então* n *é divisível por 4.*

5. Se número de Fibonacci a_n *é divisível por 4 então* n *é divisível por 6.*

6. Se número de Fibonacci a_n *é divisível por 5 então* n *é divisível por 5.*

7. Se número de Fibonacci a_n *é divisível por 7 então* n *é divisível por 8.*

8. Não existem números de Fibonacci que quando divididos por 8 deixam como resto 4.

9. Não existem números de Fibonacci ímpares e divisíveis por 17.

10. Se o índice de um números de Fibonacci é ímpar, todos seus divisores ímpares são do tipo $4t + 1$.

1.6 Números de Fibonacci e as Frações contínuas

Seja $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^*$. Pelo algoritmo da divisão existe um único par de inteiros a_0, r_0 tais que $p = a_0q + r_0, 0 \leq r_0 < q$, logo $\dfrac{p}{q} = a_0 + \dfrac{r_0}{q} = a_0 + \dfrac{1}{\dfrac{q}{r_0}}$, aplicando novamente o algoritmo para q e r_0 temos que existe um único par de inteiros a_1 e r_1 tal que

$$\frac{q}{r_0} = a_1 + \frac{r_1}{r_0}, \quad 0 \leq r_1 < r_0 < q \quad \text{logo}$$

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{r_1}{r_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{\dfrac{r_0}{r_1}}}$$

Aplicando novamente o algoritmo para r_0 e r_1 temos $\dfrac{r_0}{r_1} = a_2 + \dfrac{r_2}{r_1}$ com $0 \leq r_2 < r_1 < r_0 < q$. Assim

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{\dfrac{r_0}{r_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{\dfrac{r_1}{r_2}}}}$$

Continuando este processo temos: $\dfrac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$

onde a_0 é um inteiro não negativo e $a_1, a_2, ..., a_n$ são inteiros positivos.

A fração $\dfrac{p}{q}$ pode ser representada por $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$. Como exemplo vamos obter a representação por fração contínua de $\dfrac{34}{21}$. Pelo algoritmo da divisão

34 = 1x21 + 13; 21 = 1x13 + 8; 13 = 1x8 + 5; 8 = 1x5 + 3; 5 = 1x3 + 2; 3 = 1x2 + 1 e 2 = 2x1

logo $\dfrac{34}{21} = 1 + \dfrac{13}{21} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{21}{13}} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{8}{13}} = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{5}{8}}} = 1 +$

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{5}}}} = 1 + \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}}}}}.$$

Assim

$$\frac{34}{21} = 1 + \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}}} = [1;1,1,1,1,1,2]$$

Definição 2. *Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos recursivamente $\beta_0 = x, a_n = [\beta_n]$ e se $\beta_n \notin \mathbb{Z}$*

$$\beta_{n+1} = \frac{1}{\beta_n - a_n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se para algum n, $\beta_n = a_n$ temos $x = \beta_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$

$$= [a_0; a_1, ..., a_n].$$

Se não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, $\beta_n = a_n$ denotamos

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} = [a_0; a_1, a_2, ...]$$

A representação acima se chama a *representação por frações contínuas*. Os a_n são chamados coeficientes de fração contínua. [4]

Quando $x \in \mathbb{Q}$ o desenvolvimento por frações contínuas é finito e seus coeficientes a_n são obtidos do algoritmo da divisão como no exemplo inicial.

Como estamos interessados nos resultados envolvendo os números de Fibonacci vamos considerar apenas números positivos.

Seja $x = [a_0; a_1, a_2, ...]$. Sejam $p_n \in \mathbb{N}$ e $q_n \in \mathbb{N}^*$ primos entre si tais que

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n], n \geq 0$$

Os números $\frac{p_n}{q_n}$ são chamados reduzidas da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, ...]$. Desta definição temos que $p_0 = a_0$ e $q_0 = 1$ e ainda $\frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$, como $mdc(a_0 a_1 + 1, a_1) = 1$ [2] temos $p_1 = a_0 a_1 + 1$ e $q_1 = a_1$.

Lema 2. *Sejam $\frac{p_n}{q_n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ as reduzidas da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, ...]$. Então p_n e q_n satisfazem as relações: $p_0 = a_0, p_1 = a_0 a_1 + 1, q_0 = 1, q_1 = a_1$ e para $n \geq 0$,*

1. $p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$
2. $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$
3. $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4]. Se os coeficientes são inteiros positivos temos $p_0 < p_1 < p_2 < ...$ e $q_0 < q_1 < q_2 < ....$

Corolário 2.

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}$$

Demonstração.

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1}}{q_{k+1} q_k} = \frac{(-1)^k}{q_{k+1} q_k}. \qquad \square$$

Vamos aplicar o teorema anterior para demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 10. *Se uma fração contínua tem n coeficientes, todos iguais a 1, então esta fração é igual a* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Demonstração. Seja α_n a fração contínua com n coeficientes iguais a 1. Logo

$$\alpha_1 = 1 = \frac{p_0}{q_0}$$

$$\alpha_2 = 1 + \frac{1}{1} = [1;1] = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\alpha_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = [1;1,1] = \frac{p_2}{q_2}$$

$$\alpha_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \dots \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = [1;1,1,...,1] = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}.$$

Como $p_0 = 1, p_1 = 2$ e $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} = p_{k-1} + p_{k-2}$ temos que $p_{n-1} = u_{n+1}$ e ainda como $q_0 = q_1 = 1$ e $q_k = q_{k-1} + q_{k-2}$ temos que $q_{n-1} = u_n$. Logo $\alpha_n = [1;1,1,...,1] = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. □

Consideremos a fração contínua

$$\omega = [1;1,1,1,...] \tag{1.17}$$

$$\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$$

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Vamos calcular este limite. Vimos, no teorema (3) que u_n é o inteiro mais próximo de $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$, ou seja, para todo n temos $u_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n$ onde $|\theta_n| < \frac{1}{2}$, logo

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} + \theta_{n+1}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}}{1 + \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}}.$$

Como $|\theta_{n+1}\sqrt{5}| < \dfrac{\sqrt{5}}{2}, |\theta_n\sqrt{5}| < \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ e $\alpha^n \to \infty$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n} = 0, \text{logo} \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

O valor da fração contínua (1.17) pode ser encontrado sem usar a fórmula de Binet nem os limites. Considerando a existência do limite, representamos a fração (1.17) na forma

$$x = 1 + \frac{1}{x}, \text{ logo } x^2 - x + 1 = 0 \text{ e } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Como o valor da fração é um número não negativo $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que é α.

Do que vimos podemos concluir que o quociente de dois números de Fibonacci consecutivos se aproxima de α quando n aumenta. Podemos usar este fato para calcular o valor aproximado de $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bibliografia

[1] Vorobiov, N. N., *Números de Fibonacci*, Editora MIR, URSS, 1974.

[2] Domingues, Hygino H., *Fundamentos da Aritmética*, **vol. 1**, Atual Editora, São Paulo, 1974.

[3] Goldeberg, S., *Introduccion a las Ecuaciones en Diferenças Finitas*, Editorial Pueblo y Educación, Cuba, 1973.

[4] Moreira, Carlos G., *Frações Contínuas, Representação de Números e Aproximações*, Revista Eureka! nº 03, 1998, SBM/OBM, Rio de Janeiro, RJ.

[5] Eves, Howard , *Introdução à História da Matemática*,Editora da Unicamp, Campinas, 1997.

[6] Sierpinski, Waclaw, *250 Problémes de Théorie Élémentaire des Nombres,* Éditions Jacques Gabay, Paris, 1992.

[7] Morgado, A. C. de Oliveira, *Análise Combinatória e Probabilidade,* SBM, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, 2000.

[8] Gusmão, Gisele P. A., *Sobre Uma Questão da IX Olimpíada. Revista da Olimpíada Nº 02,* CEGRAF, Goiânia, Goiás, 2001.

[9] Castro, Helvecio P., *Números Naturais e Propriedades Indutivas. Revista da Olimpíada Nº 02,* CEGRAF, Goiânia, Goiás, 2001.

Autora: Gisele de Araújo Prateado Gusmão

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia -GO - Brasil
gisele@mat.ufg.br

REVISTA DA OLIMPÍADA - IME - UFG, nº 4, 2003, 75-83

Caracterização dos Números Racionais e Irracionais

Miguel Antônio de Camargo

Introdução

Em geral quando temos contato com alunos de segundo grau, ou até mesmo das primeiras séries dos cursos superiores e comentamos sobre números reais, existem pessoas que acham que números irracionais são apenas alguns, por exemplo $\sqrt{2}$, as vezes π e um tal de e. Um dos motivos de apresentar este assunto é que as coisas não são bem assim.

Neste texto estamos interessados em mostrar, de modo bem elementar, uma caracterização dos números racionais e, como conseqüência, os números irracionais. Mostraremos também como obter infinitos números irracionais a partir de um irracional dado. Além disso, queremos mostrar que o conjunto dos racionais é enumerável e os irracionais não.

1.1 Números Racionais

Vimos que os naturais são fechados com relação à adição e à multiplicação, e que os inteiros são fechados em relação à adição, subtração e multiplicação. No entanto, nenhum destes conjuntos é fechado com relação à divisão, porque a divisão de inteiros pode produzir frações como 3/4,7/3, -1/20 etc. O conjunto de todas as frações é o conjunto dos *números racionais.* Mais precisamente, *um número racional é um número que pode ser colocado na forma a/b, onde a e b são inteiros e* $b \neq 0$. Por exemplo, escolhendo $a = 35$ e $b = 7$, temos $\frac{a}{b} = \frac{35}{7} = \frac{5}{1} = 5$.

Observe-se que, em (a), b é divisor de a, isto já é suficiente para mostrar que o conjunto dos inteiros é um subconjunto próprio dos racionais.

É importante notar também que na definição de número racional contém a frase "um número que pode ser escrito na forma a/b, onde $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$". Não podemos simplesmente dizer "um número da forma textita/b, onde $b \neq 0$", pois existem infinitos modos de descrever um número racional, o número $\frac{3}{4}$, pode ser escrito, por exemplo,nas formas

$$\frac{6}{8}, \quad \frac{9}{12}, \quad \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}, \quad \frac{3\pi}{4\pi}, \quad \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{96}}$$

e não queremos que a definição de número racional dependa da maneira escolhida para representar o número.

1.2 Representações Decimais Finitas e Infinitas

Existe uma outra representação para os números racionais que é diferente daquelas obtidas pela multiplicação do numerador e denominador da fração ordinária por um mesmo número diferente de zero, vista na seção anterior. Essa é a denominada representação decimal, por exemplo, $1/2 = 0,5$. As representações decimais de alguns números racionais são finitas, terminam e, de outros não, são infinitas, não terminam. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = 0,5; \quad \frac{2}{5} = 0,4; \quad \frac{1}{80} = 0,0125; \quad \frac{1}{3} = 0,333...; \quad \frac{5}{11} = 0,454545...$$

Estas representações podem ser obtidas a partir das frações ordinárias, dividindo-se o numerador pelo denominador. No caso $5/11$ dividimos 5 por 11 e obtemos 0,454545...

Quais são os números racionais que têm uma representação decimal finita? Antes de dar uma resposta geral, analisaremos um exemplo:

Sabemos que $0,8625 = \frac{8625}{10000}$ e que qualquer fração decimal finita pode ser escrita na forma de fração ordinária com denominador igual a uma potência de 10. Simplificando a fração do exemplo obtemos $\frac{69}{80}$. Note-se que tanto 10000, quanto 80, têm somente fatores primos, 2 e 5. Se tivéssemos com qualquer decimal finita, ao invés de 0,8625, a fração irredutível a/b correspondente, teria a mesma propriedade. Isto é, os fatores primos do denominador b 2 ou 5, mas nenhum outro, pois b é sempre fator de alguma potência de 10. Passemos ao caso geral:

Teorema 1. *Um número racional, na forma irredutível a/b, tem uma representação decimal finita se, e somente se, b não tiver outros fatores primos além de 2 ou 5.*

Observe que o teorema contém a frase "*se, e somente se*". Com os argumentos do exemplo acima, fica provado a parte do "*somente se*", pois mostramos que a/b tem representação decimal finita somente se b não tiver fatores primos diferentes de 2 ou 5.

A parte "*se*" do teorema afirma:*se b não tiver outros fatores primos além de 2 ou 5, então o número racional a/b, a e b primos entre si, terá representação decimal finita.*

Prova: Suponhamos que b seja da forma $2^m.5^n$, com m e n naturais. Então, das duas uma: $m \leq n$ ou $n \leq m$. Se $n \leq m$, multiplicando o denominador e o numerador da fração por 5^{m-n}, teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{a.5^{m-n}}{2^m.5^n.5^{m-n}} = \frac{a.5^{m-n}}{10^m}.$$

Sendo $m - n \geq 0$,5^{m-n} será um inteiro e, portanto $a.5^{m-n}$ também será inteiro, daí, efetuando a divisão, basta colocar a vírgula na posição correta para obtermos a representação decimal finita. O caso $m \leq n$ é análogo. □

1.3 Dízimas Periódicas

Separamos os números racionais em dois tipos, os que têm representação decimal finita e os que têm representação decimal infinita. Mostraremos que as decimais infinitas possuem um grupo de algarismos que se repete indefinidamente, por exemplo:

$$\frac{5}{11} = 0,454545...; \quad \frac{3097}{9900} = 0,312828...$$

Essa repetição ocorre porque ao dividir o numerador pelo denominador o conjunto derestos da divisão possíveis é finito, daí, ao proceder a divisão indefinidamente, o resto irá aparecer mais de uma vez, aí o quociente também irá repetir. Veja os exemplos:

a)Para escrever a fração $\frac{2}{7}$ na forma decimal, divide-se 2 por 7, obtém-se $0,\overline{285714}$; no decorrer da divisão os restos possíveis são 1, 2, ..., 6.

Na verdade são, sucessivamente, 6, 4, 5, 1, 2, 3. Ao chegar no resto 2, completa um ciclo e reaparece a divisão de 20 por 7, fazendo com que haja a repetição dos algarismos do quociente.

b)No exemplo acima, a repetição ocorreu quando a divisão de 20 por 7 apareceu pela segunda vez. A divisão de 20 por 7 foi o primeiro passo da divisão toda. Não é, necessariamente, o primeiro passo que se repete. Veja o caso $\frac{209}{700} = 0,29\overline{857142}$. A repetição ocorre com o aparecimento, pela segunda vez, do resto 600. O divisor sendo 700, os possíveis restos são 1, 2, ..., 699. Portanto, em algum momento, algum resto irá aparecer pela segunda vez, mesmo que teremos que efetuar muitas divisões antes que isto ocorra.

O argumento usado nos exemplos acima pode ser usado no caso geral a/b. Com esse argumento, provamos uma parte do teorema que caracteriza os números racionais.

Teorema 2. *Todo número racional a/b pode ser representado por uma fração decimal finita ou por uma fração decimal infinita periódica, reciprocamente, toda fração decimal, finita ou periódica infinita, representa um número racional.*

Prova: A recíproca do teorema trata de dois tipos de frações decimais: as finitas e as infinitas e periódicas. As finitas já foram vistas e verificamos que representam números racionais. Falta nos mostrar que as dízimas periódicas representam números racionais. Para isso, iniciaremos com um exemplo, que pode ser generalizado. Após estudar esse caso particular, aplica-se o mesmo processo para uma dízima periódica qualquer.

Considere a dízima periódica $x = 28,123\overline{456}$, multiplicando-a, inicialmente, por um número e depois por outro, esses números são escolhidos de modo de modo que ao subtrairmos os dois produtos obtidos, as partes periódicas desaparecerão. No exemplo,os números 10^6 e 10^3 satisfazem o que pretendemos, pois $10^6x = 28123456,\overline{456}$ e $10^3x = 28123,\overline{456}$, daí, temos $10^6x-10^3x = 999000x = 28095333$. Portanto $x = \frac{28095333}{999000}$, o que mostra que x é um número racional. $\square$

Um fato interessante, aparentemente contraditório em relação ao que estudamos um pouco antes, é o seguinte: *toda fração decimal, mesmo finita, pode ser escrita na forma de uma dízima periódica infinita.*

Já ficou estabelecido, que alguns números racionais têm representação decimal finita, e que outros têm representação decimal infinita. O que é interessante é que, mesmo aqueles que têm representação finita podem ser representados por dízimas periódicas. É claro que isso pode ser feito de uma forma bastante óbvia, por exemplo 2, 3=2, 3000..., com uma infinidade de zeros. Mas, além dessa forma, existe outra um pouco surpreendente. Veja, por exemplo, a representação decimal da fração 1/3:
$\frac{1}{3} = 0,333...$; multiplicando essa igualdade por 3 obtemos 1=0,99...
Temos aí uma igualdade entre números, um com representação decimal finita, e outro infinita.

Vamos olhar a igualdade acima de outro modo. Representemos a dízima 0,999... por x, isto é, $x = 0,999...$, multiplicando-a por 10, obtemos $10x = 9,999... = 9 + 0,999... \Rightarrow 10x = 9 + x \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$.

A partir da igualdade $1 = 0,999...$, podemos obter muitas outras, por exemplo: $0,1 = 0,0999...$; $0,01 = 0,00999...$; que podem ser utilizadas para transformar qualquer fração decimal finita em infinita, por exemplo:

$$5,7 = 5,6 + 0,1 = 5,6 + 0,099... = 5,6999...$$

Esse processo, usado no sentido inverso, permite transformar qualquer dízima, com uma infinidade de noves, em fração decimal finita, veja o exemplo:

$$0,25999... = 0,25 + 0,00999... = 0,25 + 0,01 = 0,26$$

1.4 Números Irracionais e Números Reais

Ficou caracterizado todos os números racionais:*é escrito como dízima periódica ou escreve-se na forma a/b* além disso, como foi visto anteriormente, pode-se passar de uma dessas formas para a outra. No entanto, existem números que não são de nenhuma das duas formas. Por exemplo:3,01001000100001... não é dízima periódica, portanto não é numero racional. Um outro exemplo que é muito comum é o número que representa, no sentido geométrico, a medida da diagonal do quadrado de lado 1, esse número que é representado pelo símbolo $\sqrt{2}$, também não é racional. Se fosse racional, poderíamos escrevê-lo como dízima periódica ou na forma $a/b, a, b$ inteiros $b \neq 0$. Suponhamos que seja possível escrevê-lo na forma a/b acima, podemos supor também que a fração seja irredutível, nessas condições teremos $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$,$a^2 = 2b^2$, o número $2b^2$ é um inteiro par, daí, a^2 é inteiro par, portanto a é par, pondo $a = 2k$, sendo k também um inteiro, substituindo $2k$ na igualdade acima, teremos $4k^2 = 2b^2; b^2 = 2k^2$, assim, b também é par. Concluímos que a e b são ambos pares, mas inicialmente supomos que a e b seriam primos entre si. Essa contradição nos dá a conclusão de que não é possível escrever $\sqrt{2}$ na forma a/b com a e b inteiros e, portanto, $\sqrt{2}$ não é racional.

$\sqrt{3}$ também não é racional, pois se fosse, teríamos $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$, a e b supostos não divisíveis por 3, mas $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow 3b^2 = a^2$, daí, podemos observar que esta última igualdade não pode ocorrer, pois, ao fatorar a^2 ele tem um número par de fatores iguais a 3 e $3b^2$ tem um número ímpar de fatores 3, mas a fatoração é única. Logo $\sqrt{3}$ não é racional.

Os números $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[n]{p}, p$ primo, são todos exemplos de números não racionais.

Aos números não racionais dá-se o nome de *irracionais* e à união dos racionais com os irracionais *números reais.*

Em contraste com os números racionais, que são fechados em relação à adição, subtração, multiplicação e divisão, os irracionais não possui nenhuma dessas propriedades, verificaremos isso mais a frente. Mostraremos agora um teorema que permite, a partir de um número irracional, obter uma infinidade de outros números irracionais.

Teorema 3. *Seja α um número irracional e r um número racional diferente de zero. Então, a adição, subtração, multiplicação e divisão de r e α resultarão em números irracionais.*

Prova: Esses resultados são obtidos facilmente através de demonstrações indiretas (por contradição). Por exemplo, suponhamos que $\alpha + r$ seja racional, então, se $r = a/b$, $\quad \alpha + a/b = c/d$, $\quad$ daí, $\quad \alpha = c/d - a/b$, que é racional. Contradição, pois por hipótese, α é irracional.

Usando esse teorema podemos escrever uma infinidade de números irracionais, por exemplo: $\sqrt{2} + 4; 3 - 3,010010001...; r\sqrt{2}$ com $r \in \mathbb{Q}$. Na verdade, fixando um irracional e operando-o com qualquer racional, obterá número irracional.

Para vermos que os irracionais realmente não são fechados em relação às operações, tomemos como base a adição, $\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(5-\sqrt{2}\right)=7$. Soma de irracionais pode ter como resultado um número racional.

1.5 Conjuntos Enumeráveis

Um fato interessante sobre conjuntos infinitos é que mesmo se um deles for subconjunto próprio do outro, isto é, estar contido, mas ser diferente, como é o caso dos naturais pares e o conjunto dos números naturais, eles têm o “mesmo número de elementos” mesma cardinalidade.

Dizemos que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade se for possível estabelecer uma relação biunívoca entre eles. Veja os exemplos:
a)O conjunto $P=\{x=2n, n\in\mathbb{N}\}$ dos números naturais pares e os naturais, têm a mesma cardinalidade, pois, a relação biunívoca entre eles é estabelecida através da função $f:\mathbb{N}\rightarrow P$, dada por $f(n)=2n$.
b) O intervalo $(0,1)$ de números reais e o próprio conjunto dos números reais têm a mesma cardinalidade. A função $f:(0,1)\rightarrow\mathbb{R}$, dada por

$$f(x)=tg\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$$

estabelece a correspondência biunívoca.

Um conjunto C é enumerável se for finito ou se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre ele e o conjunto dos números naturais.

Na verdade o conceito de enumerabilidade de um conjunto, no caso de conjuntos infinitos, nada mais é do que uma extensão de contagem de seus elementos. Quando falamos em correspondência biunívoca entre os naturais, estamos de certa forma dizendo que o conjunto C tem o mesmo número de elementos que os naturais. Vejamos alguns exemplos de conjuntos enumeráveis:
1- O conjunto dos números naturais pares.
2- O conjunto $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$, basta tomar $f(2n)=n$ e $f(2n-1)=-n, n\neq 0$.
3- O conjunto C$=\{10^n, n\in\mathbb{N}\}$ é enumerável. Mostre isso.

O conjunto $\mathbb{Q}^+$ dos números racionais não negativos é enumerável, um modo de estabelecer a correspondência com os naturais é o seguinte:

Reunimos as frações em blocos, cada bloco contendo aquelas irredutíveis e cuja soma do numerador com o denominador seja constante.

Por exemplo,

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{1} \text{ é o bloco das frações com soma 5,}$$

enquanto

$$\frac{1}{7}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{7}{1} \text{ é o bloco das frações com soma 8.}$$

Observe que cada um desses blocos tem um número finito de elementos. Basta então escrever todos os blocos, um após o outro, na ordem crescente das somas correspondentes e enumerar na ordem que aparecem. Obviamente, aparecem todos os números racionais nesta lista:

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{1}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{4}{1}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{2}, \ldots.$$

1.6 A Não Enumerabilidade dos Irracionais

Em contraste com o que acabamos de ver, provaremos que o conjunto dos números reais não é enumerável. Para isso trabalharemos com os números do intervalo (0,1), que, como sabemos tem a mesma cardinalidade dos números reais.

Usaremos a representação decimal. Alguns números têm mais de uma representação, como por exemplo, 1,4 e 1,3999.... Para que isso não ocorra, usaremos, para cada número, sua representação decimal infinita. Com esse procedimento cada número terá uma única representação decimal.

Vamos supor que seja possível estabelecer uma correspondência biunívoca dos números do intervalo (0,1) com os números naturais. Isso é o mesmo que supor que os números do intervalo (0,1) sejam os elementos de uma seqüência $x_1, x_2, ..., x_n, ...$. Em suas representações decimais, esses números, podem ser escritos assim:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}... \\
x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}... \\
x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}...a_{3n}... \\
&... \\
x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}...a_{nn}... \\
&...
\end{aligned}$$

onde os a_{ij} são algarismos de 0 a 9.

O último passo, que nos leva a uma contradição, consiste em produzir um número do intervalo (0,1) que não esteja na lista acima. Isso é feito pelo chamado *processo diagonal de Cantor*. Construímos um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa, diferente de x_3 na terceira casa, e assim por diante; dessa forma esse número é diferente de todos os números que estão na lista acima. Como esse número não está na lista, chegamos à conclusão de que os números do intervalo (0,1) não podem ser enumerados. Daí, os reais não é um conjunto enumerável.

Sendo o conjunto dos números reais a união dos racionais com os irracionais e, os racionais um conjunto enumerável, nos leva à conclusão de que os irracionais não é enumerável.

Espero que estas notas possam contribuir para que o professor prepare e ensine este assunto, números racionais e irracionais, de maneira simples e clara para alunos do ensino fundamental e do ensino médio.

Bibliografia

[1] NIVEN, I. M., *Números: racionais e irracionais. Tradução de Renate Watanabe*, S. B. M. Rio de Janeiro.

[2] ÁVILA, G. S. S., *Introdução á Análise Matemática*, Editora Edgard Blücher Ltda, 1993.

[3] FIGUEIREDO, D. G. *Análise I, 2a edição*, Editora LTC, 1996.

Autor: Miguel Antônio Camargo

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia -GO - Brasil
miguel@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 4, 2003, 84-90

Seqüências Recorrentes Lineares

Antonio Caminha

Resumo. Neste artigo estudamos o problema de como determinar fórmulas fechadas para seqüências recorrentes lineares, aplicando o resultado obtido a um problema olímpico interessante.

1.1 Seqüências recorrentes lineares

Definição 1 (Recorrência linear)**.** *Uma seqüência* $(a_n)_{n\geq 1}$ *é dita recorrente linear, ou uma recorrência linear, se existirem um inteiro positivo* k *e números complexos* $u_0, \ldots, u_{k-1}$*, nem todos nulos, tais que*

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0, \tag{1.1}$$

para todo $n \geq 1$.

O natural k é denominado a **ordem** da recorrência linear e a equação (1.1) é a **relação de recorrência**, ou simplesmente a **recorrência** satisfeita pela seqüência. Neste caso, $(a_n)_{n\geq 1}$ é também denominada uma recorrência linear de ordem k.

O mais famoso exemplo de uma seqüência recorrente (de ordem 2) é sem dúvida a seqüência de Fibonacci[1]:

$$(F_k)_{k\geq 1}; \quad F_1 = F_2 = 1; \quad F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, \quad \forall\, k \geq 1.$$

Tendo de satisfazer tais relações, a seqüência de Fibonacci está bem definida, uma vez que podemos ir calculando seus termos *recorrendo* a termos anteriores. Assim é que

$$F_3 = F_2 + F_1 = 2, \quad F_4 = F_3 + F_2 = 3, \ldots$$

[1]Leonardo di Pisa, matemático italiano do século XI, conhecido por Fibonacci.

Voltando ao caso geral, note que, dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, há exatamente uma seqüência $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfazendo (1.1) e tal que $a_j = \alpha_j$ para $1 \leq j \leq k$. Portanto, uma recorrência linear de ordem k fica totalmente determinada quando se conhecem a relação de recorrência e os k primeiros termos da seqüência.

No que segue, vamos mostrar como, a partir de uma relação de recorrência dada, obter uma fórmula *posicional* para a_n, i.e., uma expressão para a_n como uma função de n. Para tanto, precisamos da seguinte

Definição 2 (Polinômio característico). *Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ uma seqüência satisfazendo, para $n \geq 1$, a recorrência*

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0.$$

Então seu polinômio característico é, por definição, o polinômio $f \in \mathbb{C}[X]$ dado por

$$f(X) = X^k + u_{k-1}X^{k-1} + \cdots + u_1 X + u_0.$$

O resultado a seguir ensina como obter uma fórmula posicional para uma seqüência satisfazendo uma recorrência linear a partir das raízes de seu polinômio característico:

Teorema 1 (Resolvendo uma recorrência linear). *Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ a seqüência satisfazendo, para todo $n \geq 1$, a relação de recorrência*

$$a_{n+k} + u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n = 0,$$

e suponha que as raízes $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{C}$ do polinômio característico de $(a_k)_{k\geq 1}$ sejam todas distintas. Se $a_j = \alpha_j$ para $1 \leq j \leq k$ então

$$a_n = A_1 r_1^{n-1} + \cdots + A_k r_k^{n-1}, \ \forall\, n \geq 1,$$

onde $A_1, \ldots, A_k$ é a solução do sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}. \quad (*)$$

Prova. Note primeiro que a matriz de Vandermonde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \cdots & r_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

é invertível, por ter determinante igual a

$$\det M = \prod_{1 \le i < j \le k} (r_j - r_i) \neq 0.$$

Portanto, pela regra de Krammer para sistemas lineares existem únicos complexos $A_1, \ldots, A_k$ satisfazendo o sistema do enunciado. Defina agora a seqüência $(b_n)_{n \ge 1}$ pondo

$$b_n = A_1 r_1^{n-1} + \cdots + A_k r_k^{n-1}, \ \forall\, n \ge 1.$$

Então, para $1 \le j \le k$, a igualdade matricial $(*)$ nos dá

$$b_j = A_1 r_1^{j-1} + \cdots + A_k r_k^{j-1} = \alpha_j = a_j.$$

Por outro lado, segue da definição dos b_j que

$$\begin{aligned} & b_{n+k} + u_{k-1} b_{n+k-1} + \cdots + u_0 b_n \\ = \ & \sum_{j=1}^{k} A_j r_j^{n+k-1} + u_{k-1} \sum_{j=1}^{k} A_j r_j^{n+k-2} + \cdots + u_0 \sum_{j=1}^{k} A_j r_j^{n-1} \\ = \ & \sum_{j=1}^{k} A_j r_j^{n-1} (r_j^k + u_{k-1} r_j^{k-1} + \cdots + u_0) \\ = \ & \sum_{j=1}^{k} A_j r_j^{n-1} f(r) j = 0. \end{aligned}$$

Segue que a seqüência $(b_n)_{n \ge 1}$ satisfaz a mesma recorrência que $(a_n)_{n \ge 1}$ e seus k primeiros termos coincidem com os termos correspondentes de $(a_n)_{n \ge 1}$. Por uma observação anterior, segue daí que $a_n = b_n$ para todo $n \ge 1$, ou seja

$$a_n = A_1 r_1^{n-1} + \cdots + A_k r_k^{n-1}, \ \forall\, n \ge 1.$$

□

Curiosamente, note que obtivemos a_n como sendo igual a uma soma dos $n-$ésimos termos de k progressões geométricas. Historicamente, a descoberta da fórmula acima se deu ao contrário. Ela foi determinada a partir da tentativa de se obter soluções para uma recorrência expressando-a como somas de progressões geométricas. Vejamos uma aplicação imediata da fórmula deduzida no teorema acima:

Exemplo 1. *Seja $(a_k)_{k\geq 1}$ a seqüência dada por $a_1 = 1$, $a_2 = 7$ e, para $n \geq 1$ inteiro,*

$$a_{n+2} = 8a_{n+1} - 15a_n.$$

Determine a_n em função de n.

Solução. Escrevendo a recorrência do enunciado como $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 15a_n = 0$, segue que seu polinômio característico é $f(X) = X^2 - 8X + 15$, cujas raízes são $r_1 = 3$ e $r_2 = 5$. Assim, deve ser

$$a_n = A_1 \cdot 3^{n-1} + A_2 \cdot 5^{n-1},$$

onde A_1 e A_2 são as soluções do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix},$$

i.e., $A_1 = 3$ e $A_2 = -2$. Segue que $a_n = 3^n - 2 \cdot 5^{n-1}$.

Exemplo 2 (A seqüência de Fibonacci)**.** *Prove que o $n-$ésimo número de Fibonacci F_n é dado por*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}},$$

onde $\alpha > \beta$ são as raízes de $X^2 - X - 1 = 0$.

Prova. A recorrência satisfeita pela seqüência de Fibonacci, $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ para $n \geq 1$, tem polinômio característico $f(X) = X^2 - X - 1$. Se $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ são suas raízes, segue do teorema 3 que

$$F_n = A_1 \cdot \alpha^{n-1} + A_2 \cdot \beta^{n-1},$$

onde A_1 e A_2 são as soluções do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

É imediato verificar que tais soluções são $A_1 = \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}$ e $A_2 = \frac{\alpha-1}{\alpha-\beta}$. De $\alpha + \beta = 1$ e $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, obtemos $A_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ e $A_2 = -\frac{\beta}{\sqrt{5}}$, donde segue finalmente que

$$F_n = A_1 \cdot \alpha^{n-1} + A_2 \cdot \beta^{n-1} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

□

Os dois exemplos acima tiveram o propósito de familiarizar o leitor com o processo (*mecânico*) de utilização do teorema 3 na determinação de fórmulas fechadas para recorrências lineares. Observe que, em princípio, na utilização do teorema é imprescindível podermos explicitar as raízes do polinômio característico da recorrência. O exemplo a seguir, último problema da Olimpíada Brasileira de Matemática de 1991, mostra que esse não é necessariamente o caso. Para a resolução do mesmo precisamos de alguns fatos elementares sobre raízes de polinômios. A referência [1] deve ser suficiente.

Exemplo 3 (OBM, 1991)**.** *Seja $A_1A_2A_3A_4$ o quadrado de vértices $A_1 = (0,1)$, $A_2 = (1,1)$, $A_3 = (1,0)$ e $A_4 = (0,0)$. Para cada $n \geq 1$, seja A_{n+4} o ponto médio do segmento A_nA_{n+1}. Prove que, quando $n \to +\infty$, a seqüência de pontos A_n converge para um ponto A e determine as coordenadas deste ponto A.*

Prova. Seja, para cada $n \geq 1$, $P_n(x_n, y_n)$. A condição do enunciado, juntamente com a fórmula para as coordenadas do ponto médio de um segmento, diz que $2x_{n+4} - x_{n+1} - x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, temos $2y_{n+4} - y_{n+1} - y_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O polinômio característico das recorrências acima é

$$f(X) = 2X^4 - X - 1 = (X-1)(2X^3 + 2X^2 + 2X + 1).$$

Seja $g(X) = 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ e $a, b, c \in \mathbb{C}$ as raízes de g. As relações de Girard entre os coeficientes e as raízes de um polinômio nos dão

$$a + b + c = -1 \quad \text{e} \quad ab + ac + bc = 1, \quad (*)$$

e daí

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = (-1)^2 - 2 \cdot 1 = -1 < 0.$$

Portanto, a, b, c não podem ser todos reais. Como as raízes não reais de um polinômio de coeficientes reais ocorrem aos pares *complexo-conjugado*, podemos supor, sem perda de generalidade, que $a \in \mathbb{R}$ e $b, c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, com $b = \overline{c}$. Em particular, a, b, c são dois a dois distintos. Finalmente, como 1 não é raiz de g, temos que as raízes do polinômio característico são todas distintas, e o teorema 3 nos dá

$$x_n = Aa^{n-1} + Bb^{n-1} + Cc^{n-1} + D, \quad (**)$$

com A, B, C, D constantes a determinar.

Para sabermos o que ocorre quando $n \to +\infty$ note que, por ser $g(-1)g(0) < 0$, o teorema de Bolzano garante a existência de uma raiz real de g no intervalo $(-1, 0)$. Mas desde que a é a única raiz real de g, temos então $-1 < a < 0$. Daí, as relações $(*)$ nos fornecem

$$1 = a(b + c) + bc = a(-1 - a) + b\overline{b},$$

de modo que $|b|^2 = a^2 + a + 1 < 1$. Como $|b| = |c|$, segue que $|b| = |c| < 1$. Então,

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = A \lim_{n \to +\infty} a^{n-1} + B \lim_{n \to +\infty} b^{n-1} + C \lim_{n \to +\infty} c^{n-1} + D = D.$$

O ponto crucial no argumento é que podemos calcular D sem conhecer a, b, c. Para isto, veja que conhecemos x_1, x_2, x_3, x_4: fazendo $n = 1, 2, 3, 4$ em $(**)$ chegamos a

$$\begin{cases} A + B + C + D = 1 \\ Aa + Bb + Cc + Dd = 1 \\ Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dd^2 = 0 \\ Aa^3 + Bb^3 + Cc^3 + Dd^3 = 0 \end{cases}.$$

Multiplicando as três últimas equações por 2 e somando os resultados membro a membro, chegamos a

$$Ag(a) + Bg(b) + Cg(c) + 7D = 3.$$

Desde que a, b, c são raízes de g, vem que $g(a) = g(b) = g(c) = 0$, e daí $D = \frac{3}{7}$. De modo análogo provamos que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{4}{7}$ e assim

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7} \right).$$

□

Para saber mais sobre recorrências, recomendamos ao leitor o artigo [2]. Para algumas aplicações em Combinatória, veja também [3].

Bibliografia

[1] Iezzi, Gelson *Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 6.* São Paulo: Atual, 1987.

[2] Pollman, Héctor S. *Equações de Recorrência.* Eureka 9, pp. 33-41. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.

[3] dos Santos, Antonio P. et al. *Introdução à Análise Combinatória.* São Paulo: UNICAMP, 1998

Autor: Antonio Caminha (Doutorando em Matemática)

Endereço: Universidade Federal do Ceará
Departamento de Matemática
Campus do Picci
Fortaleza - CE - Brasil
e-mail: a_caminha@hotmail.com

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 4, 2003, 91-99

Conjuntos enumeráveis

Bruno B. S. Lima

Resumo. Neste artigo são apresentadas algumas noções básicas da teoria dos conjuntos, em particular introduzindo os conceitos de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.

1.1 Introdução

Este artigo trata de uma introdução à Teoria dos Conjuntos. O primeiro a estudar essa teoria como uma disciplina matemática foi o russo Georg Cantor (1845-1918) no final do século dezenove. Esta teoria está entre os fundamentos da ciência e serve como linguagem para a matemática atual.

Procuraremos dar ênfase ao caso em que o conjunto em questão é o dos números reais $\mathbb{R}$ ou alguns de seus subconjuntos. Pretendemos discutir algumas perguntas como: É sempre possível ordenar os elementos de um conjunto? Existem mais números racionais ou irracionais?

Os símbolos e operações relativos a conjuntos são por exemplo $\in$, $\not\subset$, $\cap$, $\cup$, $\subset$, $\emptyset$, $\times$ (produto cartesiano). Dado um conjunto X e $A \subset X$, A^c denota o complementar de A em relação a X, isto é, $A^c = \{x \in X : x \notin A\} = X \setminus A$. A notação X^n denota $X \times X \times ... \times X$ (n vezes). O conjunto dos naturais será denotado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, os inteiros por $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e os racionais por $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Os reais serão denotados por $\mathbb{R}$. A construção de $\mathbb{R}$ não é algébrica, sendo necessário os conceitos de análise. Temos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. As várias propriedades das operações de conjuntos podem ser vistas em [1] e [2].

Basicamente podemos definir conjuntos de duas maneiras: exibindo todos os elementos do conjunto ou então a partir de um certo conjunto, podemos escolher alguns de seus elementos que satisfaçam a uma determinada propriedade, formando assim um novo conjunto. Vejamos exemplos: podemos tomar o conjunto $A = \{-2, 1, 5, 7\}$, aqui estamos exibindo todos os elementos de A. No outro caso, fixe o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e construa P o conjunto de todos os naturais primos, ou seja, $P = \{x \in \mathbb{N} : \text{x é primo}\}$, observe que não é possível listar todos os elementos de P. Ou então, fixe $\mathbb{R}$ e construa o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0\}$, então $D = \{2\}$. Porém, se fixarmos $\mathbb{C}$ (complexos), e tomarmos $D' = \{x \in \mathbb{C} : x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0\}$, temos $D' = \{2, 1 + i, 1 - i\}$.

1.2 Relações

Dados conjuntos X e Y uma *relação* de X em Y é um subconjunto R do produto cartesiano $X \times Y$. Lembramos que os elementos de $X \times Y$ são os pares ordenados (x, y), $x \in X$, $y \in Y$. Enfatizamos que $(x, y) \neq (y, x)$, a menos que $x = y$. Por exemplo, $X = \{0, 1, 2\}$ e $Y = \{1, 3, 5\}$, então podemos exibir $R = \{(0, 3), (0, 5), (2, 5)\}$, uma relação de X em Y. Se $X = Y$ dizemos que R é uma relação em X. Dados $x \in X$ e $y \in Y$, se o par $(x, y) \in R$, também denotamos xRy e dizemos x se relaciona com y.

No caso acima, foi exibida a relação, mas em geral as relações são definidas através de propriedades que devem satisfazer os pares $(x, y) \in X \times Y$. Exemplos:

1) $X = \{0, 2, 3\}$ e $Y = \{2, 7, 9\}$, definimos $R \subset X \times Y$ por $(x, y) \in R$ se x divide y. Assim, 2 divide 2 e 3 divide 9, logo $(2, 2) \in R$ e $(3, 9) \in R$, já $(2, 7) \notin R$, pois 2 não divide 7. Portanto R={(2,2);(3,9)}.

2) $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{0, 1, 4, 5, 9\}$, defina $(x, y) \in R$ se $x^2 = y$, com $(x, y) \in X \times Y$, temos R={(1,1);(2,4)}.

3) $X = \{formiga, homem, elefante\}$, defina xRy se x for mais pesado que y, com $x, y \in X$. Assim temos

   $$R = \{(elefante,\ formiga),\ (elefante,\ homem),\ (homem,\ formiga)\}.$$

4) $X = \mathbb{N}$, defina xRy, com $x, y \in \mathbb{N}$ se $y - x \in \mathbb{N}$, ou equivalentemente, $x < y$. Observe que aqui não é possível listar todo o conjunto infinito R, mas ele está bem definido.

5) $X = \mathbb{N}$ e xRy se x divide y.

Seja R uma relação em X e $x, y, z \in X$, então:

Se para todo $x \in X$, xRx , ou seja, todo elemento de X se relaciona com si mesmo então a relação R é dita *reflexiva.* No exemplo 5) R é uma relação reflexiva. Já a relação do exemplo 4) não é reflexiva.

Se xRy implica yRx, então R é dita *simétrica.* Por exemplo, $X =\{$ conjunto dos triângulos no plano$\}$ e xRy se x é semelhante a y, essa relação é simétrica, ao contrário da relação do exemplo 5) pois 2R6 (2 divide 6), mas 6 não divide 2, então não temos 6R2.

Se xRy e yRx implicar $x = y$, então R é dita *anti-simétrica.* A relação 5) é anti-simétrica, ao contrário do exemplo 3).

Se xRy e yRz implicar xRz então R é dita *transitiva.* A relação do exemplo 4) é transitiva.

Observemos agora a relação em $\mathbb{R}$ definida por xRy se $y - x \geq 0$, ela é (prove) reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Esta relação é conhecida como *relação de ordem* e dizemos que $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado. Além disso esta relação de ordem é compatível com as operações de soma e multiplicação de números reais.

Em geral, dado um conjunto X, uma relação em X que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva é dita uma *ordem parcial* no conjunto X. O adjetivo "parcial" vem do fato que às vezes não é possível relacionar (comparar) dois elementos de um certo conjunto. Voltemos ao exemplo em $\mathbb{N}$ e defina xRy se x divide y essa relação é uma ordem parcial em $\mathbb{N}$, mas não podemos relacionar os elementos 2 e 5. Daí surge uma nova definição: *uma ordem total num conjunto X é uma ordem parcial em X, com uma propriedade adicional, para quaisquer $x, y \in X$ temos xRy ou yRx.*

Em $\mathbb{R}$ a relação $\leq$ é uma ordem total. Um conjunto no qual pode-se definir uma ordem parcial (ou total) é dito parcialmente (totalmente) ordenado.

Consulte a referência [5] que mostra a impossibilidade de construir uma ordem total no conjunto $\mathbb{C}$ que seja compatível com suas operações de adição e multiplicação.

Seja R uma relação que define num conjunto uma ordem parcial. Se $(x, y) \in R$ denotamos $x \preceq y$ (lê-se x precede y). Vamos utilizar alguns diagramas que ajudam a entender e a exemplificar conjuntos ordenados, nesses diagramas, quando $x \preceq y$ vamos representar isso por uma seta com início em x e ponta em y. Por exemplo, seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, com $(x, y) \in R$ se x divide y. Essa relação define uma ordem parcial em

A. Veja a figura 1.1.

Em um conjunto ordenado X, um elemento $x \in X$ é dito *máximo* se nenhum outro elementos de X o precede. Analogamente se define *mínimo*. Por exemplo, seja $W = \{a, b, c, d, e\}$ ordenado parcialmente pelo diagrama na figura 1.1.

Assim a é o elemento máximo de W e tanto d quanto e são elementos mínimos. Observamos que o conjunto $\{a, c, e\}$, subconjunto de W, é totalmente ordenando. Já o subconjunto {a,b,c,d} não é totalmente ordenado. Mas ambos possuem elementos máximos e mínimos.

Seja Y um subconjunto de um conjunto X parcialmente ordenado. Um elemento $x \in X$ é chamado *limite superior* de Y se todo elemento de Y precede x. Analogamente define-se *limite inferior.* Por exemplo, no diagrama 1.1, tome o conjunto $T = \{d, c, e\} \subset W$, então a e c são limites superiores de T e c é o elemento máximo de T.

Deixamos a cargo do leitor estudar as propriedades da seguinte ordem nos números naturais.

$$
\begin{aligned}
3 >&5 > 7 > 9 \ldots > \ldots \\
6 >&10 > 14 > 18 > \ldots > \ldots \\
12 >&20 > 28 > 36 > \ldots > \ldots \\
\ldots >& \ldots > \ldots > \ldots > \ldots > \ldots \\
\ldots >& \ldots > 8 > 4 > 2 > 1
\end{aligned}
$$

Esta ordem $>$ significa que 3 é o maior elemento de $\mathbb{N}$. Na primeira linha listamos todos os números ímpares, na segunda linha listamos todos os dos números pares que tem decomposição na forma $2 \times p$, onde p é ímpar e assim sucessivamente. Na última linha listamos todas as potências de 2 tendo o 1 como o menor elemento. Portanto escrevemos,

$$\mathbb{N} = \{3,\ 5,\ 7, 9, \ldots, 6,\ 10,\ 14, \ldots, 12,\ 20,\ \ldots, \ldots, 2^k, \ldots, 16, 8,\ 4,\ 2,\ 1\}.$$

Um fato importante da Teoria de Conjuntos, foi formulado em 1935 pelo matemático alemão Max Zorn (1906-1993), fato que hoje é conhecido como Lema de Zorn.

Lema 1 (Lema de Zorn)**.** *Seja X um conjunto não vazio, parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado tem um limite superior em X, então temos que X contém um elemento máximo.*

Para ilustrar esse fato considere o conjunto $Z = \{a, b, c, d, e\}$, parcialmente ordenado como no diagrama da figura 1.1. Os subconjuntos to-

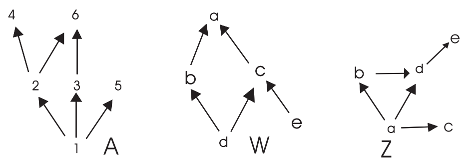


Figura 1.1: Diagramas de conjuntos parcialmente ordenados

talmente ordenados de Z são $\{a, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, d\}$, $\{b, d\}$, $\{d, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{a, b, d\}$ e $\{a, b, d, e\}$. Todos eles possuem limites superiores em Z e Z possui c e e como elementos máximos.

Esse lema, aparentemente simples é utilizado em contextos mais complicados e é equivalente a um princípio proposto 30 anos antes por outro alemão Ernst Zermelo (1871-1953) conhecido como Princípio da Boa Ordem e também é equivalente a um fato ainda mais antigo, o Axioma da Escolha, uma das bases de toda a Teoria de Conjuntos. Essas equivalências podem ser encontradas em [1].

1.3 Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis

Vamos agora introduzir o conceito de função: dada uma relação de X em Y dizemos que essa relação é uma função (e agora usaremos a letra f ao invés de R para denotar tal relação) se todo elemento de X se relaciona com um único elemento de Y, isto é, para qualquer $x \in X$, existe e é único o elemento $y \in Y$ tal que xfy, nesse caso escrevemos $f(x) = y$.

Em resumo uma função é um processo determinístico (máquina) f que a cada elemento do domínio X associada um único elemento $y = f(x)$ do contradomínio Y. A representação usual de função é a seguinte $f : X \to Y$. Podemos interpretar uma função dizendo que X é transformado ou transportado no subconjunto $f(X) = \{y \in Y : y = f(x), x \in X\} \subset Y$ pela máquina f. Com essa definição, dos exemplos de relações anteriores, apenas o exemplo 2) é uma função. No exemplo 1) não temos função pois 0 não se relaciona com ninguém. Em 3) o elefante é mais pesado que o homem e também que a formiga. Em 4) o natural 3, por exemplo, se relaciona com infinitos números.

Os conceitos básicos de classificações das funções são: *função injetiva,* significando que quaisquer dois elementos do domínio X têm imagens distintas, i.e., $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; *função sobrejetiva*, significando que para todo $y \in Y$ existe pelo menos um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$ e *função bijetiva*, significando que a função é simultaneamente injetiva e sobrejetiva. Veja [2].

Dizemos que um conjunto X é *enumerável* se ele for *finito*, i.e, possuir uma quantidade finita de elementos, ou se existir uma bijeção entre X e $\mathbb{N}$; essa bijeção é chamada de uma *enumeração* do conjunto X. A grosso modo, é como se pudéssemos listar (seqüenciar) os elementos de $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \}$, assim como estão os naturais.Temos os seguintes fatos:

1) $\{-1, 2, \pi, 4\}$ é enumerável pois é finito.

2) O conjunto $P = \{2, 4, 6, ...\}$ dos números pares é enumerável. Basta tomar $f : \mathbb{N} \to P$, pondo $f(x) = 2x$.
f é injetiva, pois $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.
f é sobrejetiva, pois $\forall p \in P$, $\dfrac{p}{2} \in \mathbb{N}$ e $f(\dfrac{p}{2}) = p$.

3) Se X e Y são conjuntos enumeráveis, então $X \cup Y$ também é. De fato, se X e Y são finitos, o mesmo vale para $X \cup Y$. Se X e Y são infinitos (se apenas um for finito, a idéia é a mesma), sejam $f : X \to \mathbb{N}$ e $g : Y \to \mathbb{N}$ suas enumerações, defina $h : X \cup Y \to \mathbb{N}$, tome $p \in X \cup Y$ se $p \in X$ então $h(p) = f(p)$, se $p \in Y \cap X^c$ então $h(p) = g(p)$.

   Assim, se definirmos $-\mathbb{N} = \{-1, -2, -3...\}$, segue que $\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ é enumerável.

   Na verdade, sendo X_1, X_2, $\ldots, X_n, ...$ uma seqüência de conjuntos enumeráveis, então o conjunto $X = X_1 \cup X_2 \cup ...X_n \cup \ldots$ também é enumerável e denotamos $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

4) Se Y é enumerável e $f : X \to Y$ é uma função injetiva, então X é enumerável.

5) Se X é enumerável e $f : X \to Y$ é uma função sobrejetiva, então Y é enumerável.

6) O produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. De fato, basta definir $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, pondo $f(a,b) = 2^a 3^b$ e verificar que essa é injetiva. E o mesmo vale para $\mathbb{Z}^n$.

7) Se X e Y são enumeráveis então $X \times Y$ é enumerável.

De fato, se $f : X \to \mathbb{N}$ e $g : Y \to \mathbb{N}$ são enumerações, defina $h : X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por $h(x,y) = (f(x), g(y))$. Claramente h é injetiva.

8) O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.

Temos que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Definindo $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$, com $f(a,b) = \dfrac{a}{b}$, f é sobrejetiva e devido ao fato 5) segue que $\mathbb{Q}$ é enumerável; isso foi primeiramente enunciado por Cantor em 1873.

Essa é a maneira tradicional de mostrar que os racionais são enumeráveis, ou seja, mostramos que existe uma bijeção entre $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}$, mas como exibir tal função?

9) Seja $K : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{N}$ definida por

$$K(\frac{m}{n}) = {p_1}^{2a_1} {p_2}^{2a_2} \dots {p_r}^{2a_r} {q_1}^{2b_1 - 1} {q_2}^{2b_2 - 1} \dots {q_s}^{2b_s - 1}, \text{com } p_i \neq q_j, \forall i, j$$

onde, $m = {p_1}^{a_1} {p_2}^{a_2} ... {p_r}^{a_r}$ e $n = {q_1}^{b_1} {q_2}^{b_2} ... {q_s}^{b_s}$ estão decompostos em fatores primos. Então K é uma bijeção. De fato, temos que todo racional positivo tem uma representação única na forma $\dfrac{m}{n}$ com m, n primos entre si. Decomponha os números m, n em fatores primos: $m = {p_1}^{a_1} {p_2}^{a_2} ... {p_r}^{a_r}$, $n = {q_1}^{b_1} {q_2}^{b_2} ... {q_s}^{b_s}$. Forme o número

$$K(m/n) = {p_1}^{2a_1} {p_2}^{2a_2} ... {p_r}^{2a_r} {q_1}^{2b_1 - 1} {q_2}^{2b_2 - 1} ... {q_s}^{2b_s - 1}, \text{com } p_i \neq q_j, \forall i, j$$

Obviamente K é uma função de m/n. Se $n = 1$ temos $K(m) = m^2$. Essa função é (prove!) uma bijeção entre os racionais positivos, $\mathbb{Q}_+^*$, e o conjunto dos naturais $\mathbb{N}$, veja [3].

Assim, está parecendo que tudo é enumerável! Mas felizmente, não é assim tão simples.

10) O conjunto $\mathbb{R}$ é não enumerável.

Para mostrar isso, vamos usar o Teorema dos Intervalos Encaixados (cuja prova pode ser encontrada em [2]):

Teorema 1. *Seja $I_1, I_2, ...I_n, ...$ uma seqüência de intervalos fechados com $I_1 \supset I_2 \supset ...I_n \supset ...$ a intersecção $\cap I_n$ é não vazia, isto é, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Por exemplo, defina $I_1 = [-1, 1], I_2 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], ..., I_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, observe que 0 pertence a todos esses intervalos, logo pertence a intersecção de todos eles.

Voltando a demonstração do item 10), a idéia essencial é que dados o intervalo fechado $[a, b]$ e um número x_0, existe um intervalo fechado $J \subset [a, b]$ tal que $x_0 \notin J$. Tome um conjunto enumerável qualquer $X = \{x_1, x_2, ...x_n, ...\} \subset \mathbb{R}$, vamos encontrar um número x real tal que $x \notin X$. Seja I_1 um intervalo fechado tal que $x_1 \notin I_1$, podemos obter I_2 um intervalo fechado com $x_2 \notin I_2$ e $I_2 \subset I_1$ e assim por diante, construindo os intervalos $I_1 \supset I_2 \supset ...I_n \supset ...$ com $x_n \notin I_n$. Esses intervalos satisfazem o teorema 1, logo existe $x \in \cap I_n$, mas x não é nenhum dos x_n, logo $x \notin X$. Como $X \subset \mathbb{R}$, mas $\mathbb{R} \not\subset X$ qualquer que seja o conjunto enumerável X. Assim o conjunto dos números reais não pode ser enumerável.

11) O intervalo $[0, 1]$ não é enumerável.

Vamos mostrar por absurdo. Se $(0, 1]$ for enumerável então $[0, 1] = \{0\} \cup (0, 1]$ também é. Observe que $f : (0, 1] \to (n, n + 1]$ definida por $f(x) = x + n$ é uma bijeção, logo $(n, n + 1]$ também é enumerável e o mesmo acontecerá, devido ao fato 3) com $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n + 1] = \mathbb{R}$, o que é absurdo.

Observação 1. *Como $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ é enumerável, segue que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ou seja, o conjunto dos números irracionais é não enumerável.*

"Respondendo" à pergunta da introdução, sabemos que existem infinitos racionais e infinitos irracionais, porém esses "infinitos" têm naturezas diferentes. Apesar dos racionais serem enumeráveis, seu complementar (os irracionais) é não enumerável e o mesmo acontece com todos os reais. De modo grosseiro, é como se o infinito dos racionais nada influenciasse no infinito dos reais. Analogamente, o deserto do Saara possui uma "infinitude" de grãos de areia, mas esse "infinito" não é nada se comparado com as "infinitas" partículas que constituem o universo.

Voltando ao concreto. Dado um número $x_0 \in \mathbb{R}$ dizemos que x_0 é um número *algébrico* se existe um polinômio com coeficientes inteiros tais que x_0 é raiz deste polinômio. Mais formalmente, existem $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$ tais que, se $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ e $P(x_0) = 0$. Por exemplo:
1 é raiz do polinômio $P(x) = x - 1$, logo 1 é algébrico.
$1 + \sqrt{3}$ é algébrico, pois é raiz de $P(x) = x^2 - 2x - 2$.
Um problema difícil é mostrar que π e e (base dos logaritmos naturais) não são algébricos.

Outro fato provado por Cantor é que o conjunto dos números algébricos é enumerável. De fato, vamos denotar por $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios de grau n com coeficientes inteiros. Assim, dados $(a_0, a_1, ..., a_n)$ $n + 1$ números inteiros podemos obter um elemento de $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$, o elemento $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ e vice-versa, ou seja, existe uma função bijeção entre $\mathbb{Z}^{n+1}$ e $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$, como o primeiro destes é enumerável, segue que o segundo também é. Defina agora uma função $\Re$ que leva um polinômio de $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$ em suas raízes reais, assim para cada polinômio p $\in \mathcal{P}_n(\mathbb{Z})$, $\Re(p)$ é um conjunto finito (contém no máximo n elementos), logo enumerável e defina A_n a imagem dessa função, isto é, A_n é o conjunto das raízes de todos os polinômios de grau n com coeficientes inteiros, A_n é enumerável por ser união de conjuntos finitos. Assim, o conjunto dos números algébricos $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é enumerável.

Um número que não é algébrico é dito *transcendente*. Sendo A o conjunto dos números algébricos e T o conjunto dos transcendentes como A é enumerável e $\mathbb{R} = A \cup T$ é não enumerável, segue que T é não enumerável.

1.4 Problemas

1- Mostre que $M = \{1, 2, 4, 8, 16...\}$ é totalmente ordenado.

2- Dado X um conjunto finito, prove que $f : X \to X$ é injetiva, se e somente se é sobrejetiva.

3- Dados os conjuntos $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ e $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1\}$, ou seja uma circunferência e uma elipse. Existe alguma bijeção entre C e E ? Sugestão: faça um desenho e uma semi-reta saindo da origem.

4- (**Desafio**) No intervalo $[0,1]$ faça a seguinte construção: retire o seu terço médio aberto $(1/3, 2/3)$, restam então os intervalos $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Depois retire o terço médio de cada um desses intervalos sobrando então $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$ e $[8/9, 1]$. Agora retire o terço médio de cada um desses intervalos, e assim por diante. Seja C o conjunto dos pontos que restam após essa construção, C é chamado de Conjunto de Cantor. Observe que $\{0,\ 1,\ 1/3,\ 2/9,\ \ldots\} \subset C$. Mostre que o conjunto C é não enumerável. (Sugestão: use o Teorema dos Intervalos Encaixados)

5) Demonstre ou dê contra-exemplo para as seguintes afirmações: a) Existe uma bijeção entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. b) Existe uma bijeção entre C e $C \times C \times C$, C o conjunto de Cantor definido no item 4). c) Existe uma bijeção entre $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. d) Existe uma bijeção entre C e $\mathbb{R}$.

1.5 Comentários Finais

Para uma introdução à Teoria Geral dos Conjuntos, às relações de equivalência sugerimos [1]. A construção rigorosa do conjunto $\mathbb{R}$ é apresentada em [2]. Para uma leitura complementar sobre a noção de ordem veja [5]. Sugerimos ao leitor familiarizar-se com os os axiomas de Peano (1858-1932), [2], [4]. Esses axiomas foram enunciados em 1889 tendo como base apenas alguns fatos sobre conjuntos e a partir deles pôde-se construir os números naturais chegando-se à conceituação dos *números reais* usando os cortes de Dedekind (1831-1916) ou as seqüências de Cauchy (1789-1857). Para referências biográficas de vários matemáticos veja **http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/** .

Bibliografia

[1] P. Halmos, *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, tradução de Irineu Bicudo, USP-SP, (1970).

[2] E. Lima, *Curso de Análise*, vol.1, 10ª edição, Projeto Euclides, IMPA-RJ, (2002).

[3] Y. Sagher, *Couting the rationals,* Amer. Math. Monthly., vol. **96**, (1989), pp. 823

[4] V. Silva, *Números: Construção e Propriedades*, Editora da UFG, (2003).

[5] V. Silva, *Ordenação dos Números Complexos*, Revista da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, vol. **3**, (2002).

Autor: Bruno Borges de Souza Lima (3ºano bacharelado)
bbslima@yahoo.com.br

Supervisor: Prof. Ronaldo Alves Garcia
ragarcia@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 4, 2003, 102-117

Configurações de Retas, Planos e Círculos

Alacyr Gomes, Helvecio Castro e Ronaldo Garcia

Resumo. Neste artigo são obtidos resultados de contagem em geometria plana e espacial relacionados com configurações de retas no plano, grandes círculos na esfera e planos no espaço. Várias noções de configurações são introduzidas e usamos argumentos heurísticos e o princípio da indução finita para obtenção dos números de regiões, arestas e vértices.

1.1 Introdução

Neste trabalho apresentamos resultados sobre contagem em geometria plana e espacial. A motivação inicial para este artigo foi uma questão da XI Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás, ano de 2002, que propunha fazer o esboço de várias configurações de retas. Acreditamos que a apresentação destes resultados poderá servir de fonte complementar para o ensino de contagem, com forte motivação na geometria. O estudo de configurações têm uma ampla literatura, sendo de interesse em várias áreas incluindo geometria computacional, física nuclear, robótica, complexidade de algoritmos e probabilidade, [1], [4], [10]. Na seção 1.2 são estudadas as configurações livres, restritas (bipolar, tripolar, etc.) e mistas de retas no plano. Na seção 1.3 abordamos o estudo das configurações livres e restritas de planos no espaço. Na seção 1.4 são obtidas estimativas para o número mínimo de triângulos e para o número máximo de quadriláteros presentes numa configuração livre de retas. Na seção 1.5 formulamos o análogo do conceito de configuração para grandes círculos na esfera. Na seção 1.6 são apresentadas conclusões do estudo realizado e evidenciado o contexto deste estudo.

1.2 Configurações de Retas no Plano $\mathbb{R}^2$

Uma configuração de retas no plano decompõe o mesmo em regiões poligonais (triângulos, quadriláteros, pentágonos, etc.). O número de regiões da maioria das configurações, conforme descreveremos, é um invariante topológico, i.e., não depende da posição relativa das várias retas (união de arestas e vértices), só dependendo do número de retas. Por outro lado, a forma geométrica das regiões depende das posições relativas das retas, sendo as regiões de uma configuração todas convexas, pois são obtidas como intersecções de semiplanos.

Definição 1. *Uma coleção de n retas distintas no plano, $\{r_1, \cdots, r_n\}$, será chamada de* configuração livre *quando as retas estiverem em posição geral, i.e, quando não existir nenhum par de retas paralelas e nem três ou mais retas concorrentes num mesmo ponto.*

Dada uma configuração com n retas, as componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{i=1}^{n} r_i$ são chamadas *regiões.* Os *vértices* da configuração são os pontos $v_{ij} = r_i \cap r_j$, $i \neq j$, e as *arestas* da configuração são os segmentos de retas $r_i \setminus \cup_{j=1}^{m} v_{ij}$, com $i = 1, \cdots, n$.

Observamos que as arestas podem ser segmentos de reta limitados ou semi-retas, e as regiões podem ser limitadas ou ilimitadas, i.e., pelo menos uma aresta de sua fronteira é uma semi-reta.

O problema de determinar o número de regiões de uma configuração livre, com n retas, pode ser tratado de modo heurístico, como a seguir. Para determinar o número de regiões, R_n, vamos admitir que esse número é uma função quadrática que depende somente de n. Então $R_n = an^2 + bn + c$, e os valores dos coeficientes a, b e c podem ser determinados fazendo a contagem das regiões em algumas configurações particulares. Por exemplo, observando configurações com 1, 2 e 3 retas obtemos $R_1 = 2$, $R_2 = 4$ e $R_3 = 7$. Os valores de a, b e c podem ser obtidos resolvendo o sistema de equações

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 4 \\ 9a + 3b + c &= 7 \end{aligned}$$

cuja solução é $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = 1$. Logo de acordo com esse argumento, o número de regiões para qualquer número n de retas será $R_n = \frac{n^2+n+2}{2}$.

Um raciocínio análogo pode ser aplicado para obter o número de arestas e de vértices. Essa mesma expressão será obtida no teorema abaixo, cuja prova será feita usando o princípio da indução finita.

Teorema 1. *O número de regiões, de arestas e de vértices, de uma configuração livre com n retas no plano, é dado, respectivamente, por:*

$$R_n = \frac{n^2+n+2}{2}, \qquad A_n = n^2, \qquad V_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Demonstração. Dada uma configuração livre com n retas, ao ser excluída uma das retas obtém-se outra configuração com $n-1$ retas. Observe que essa reta tem intersecção com todas as outras retas, logo ela contém $n-1$ vértices que a divide em n arestas. Como cada aresta divide uma região da configuração com $n-1$ retas, então ao se excluir uma reta, o número de regiões é reduzido em n. Esse processo recursivo mostra que o número de regiões é o mesmo para duas configurações com mesmo número de retas, i.e., não depende da posição relativa das retas, e além disso, $R_n = R_{n-1} + n$, para todo $n \geq 2$. Como $R_1 = 2$, aplicando o princípio da indução obtém-se a expressão desejada. As expressões para o número de arestas e de vértices podem ser obtidas de maneira análoga. □

Definição 2. *Uma configuração* bipolar *do tipo (m,n) no plano é uma coleção com $m+n$ retas $\{r_1,\cdots,r_m\}$ e $\{s_1,\cdots,s_n\}$ tais que $\cap_{i=1}^m r_i = A \in \mathbb{R}^2$, $\cap_{j=1}^n s_j = B \in \mathbb{R}^2$, $A \neq B$, e que estão em em posição geral, i.e. duas retas distintas r_i, s_j são concorrentes e seu ponto de intersecção é diferente de A e B.*

Em linguagem da teoria dos conjuntos expressamos como, $r_i \cap s_j \neq \emptyset$ e $(r_i \cap s_j) \cap \{A,B\} = \emptyset$, para $i = 1,\cdots,m$ e $j = 1,\cdots,n$. As componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus [(\cup_{i=1}^m r_i) \cup (\cup_{j=1}^n s_j)]$ são chamadas *regiões bipolares*. Os vértices da configuração são A, B e os pontos $v_{ij} = r_i \cap s_j$. As arestas da configuração são os segmentos de retas $r_i \setminus \{A, \cup_{j=1}^m v_{ij}\}$ e $s_j \setminus \{B, \cup_{i=1}^n v_{ij}\}$.

Na figura 1.1 mostramos uma configuração bipolar com 4 retas, possuindo 11 regiões, 16 arestas e 6 vértices.

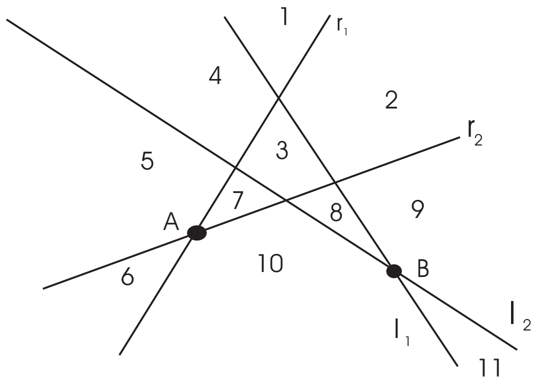


Figura 1.1: Configuração bipolar de retas do tipo $(2, 2)$

Teorema 2. *O número de regiões, de arestas e de vértices de uma configuração bipolar de retas no plano do tipo* (m, n) *é dado respectivamente por:*

$$R_{m,n} = mn+2(m+n)-1\,, \quad A_{m,n} = 2mn+2(m+n)\,, \quad V_{m,n} = mn+2.$$

Demonstração. Por um argumento análogo ao da demonstração do teorema 1 obtemos a recorrência

$$\begin{aligned} R_{m,n} =& R_{m,n-1} + m + 2, \quad n \geq 2 \\ R_{m,1} =& 3m + 1. \end{aligned}$$

A demonstração é concluída aplicando o princípio da indução finita. Analogamente calcula-se o número de arestas e de vértices. □

Observação 2. *O argumento heurístico utilizado para a contagem de regiões numa configuração livre, pode ser aplicado também para o caso bipolar. Admitindo que o número de regiões é uma função simétrica do número de retas,* $R_{m,n} = f(mn, m+n)$*, e que a função de contagem é linear nos coeficientes* mn *e* $m+n$ *temos* $f(m+n, mn) = amn + b(m+n) + c$*. Logo, fazendo a contagem do número de regiões conexas para alguns casos particulares temos:* $f(1,1) = 4,\ f(1,2) = 7,\ f(2,2) = 11.$

Este sistema linear de equações é dado por:

$$\begin{aligned} a + 2b + c =& 4 \\ 2a + 3b + c =& 7 \\ 4a + 4b + c =& 11 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima obtemos que $a = 1,\ b = 2,\ \ e\ c = -1$ *e portanto a fórmula*

$$R_{m,n} = f(m+n, mn) = mn + 2(m+n) - 1$$

para o número de regiões (limitadas e não limitadas). Analogamente os números de arestas e de vértices podem ser calculados.

Definição 3. *Uma configuração* mista *de retas no plano, do tipo* (m, n)*, é um conjunto finito de retas,* r_i $, i = 1, \cdots, m$*, passando por um ponto* A *e* n *retas livres* s_j $, j = 1, \cdots, n$*, que estão em posição geral, i.e, cada reta que contém* A *tem intersecção não vazia com todas as retas da família* $\{s_j\}$ *fora do ponto* A*, e além disso as retas da família* $\{s_j\}$*, estão em posição geral. As componentes conexas de* $\mathbb{R}^2 \setminus [(\cup_{i=1}^{n} r_i) \cup (\cup_{j=1}^{m} s_j)]$ *são chamadas* regiões mistas.

Definição 4. *Uma configuração tripolar de retas do tipo* (m, n, l) *no plano é um conjunto finito de retas,* r_i $, i = 1, \cdots, m$*, e* s_j $, j = 1, \cdots, n$*, e* t_k $, k = 1, \cdots, l$ *tais que* $\cap_{i=1}^{m} r_i = A \in \mathbb{R}^2$*,* $\cap_{j=1}^{n} s_j = B \in \mathbb{R}^2$*,* $\cap_{k=1}^{l} t_k = C \in \mathbb{R}^2$*,* $A \neq B \neq C$*, que estão em posição geral, i.e,* $r_i \cap s_j \neq \emptyset, r_i \cap t_k \neq \emptyset, s_j \cap t_k \neq \emptyset$*, e* $(r_i \cap s_j) \cap \{A \cup B\} = \emptyset$*,* $(r_i \cap t_k) \cap \{A \cup C\} = \emptyset$*,* $(s_k \cap t_j) \cap \{B \cup C\} = \emptyset$*. As componentes conexas de* $\mathbb{R}^2 \setminus [(\cup_{i=1}^{m} r_i) \cup (\cup_{j=1}^{n} s_j) \cup (\cup_{k=1}^{l} t_k)]$ *são chamadas* regiões tripolares.

Problema 1: Provar que o número de regiões, de arestas e de vértices de uma configuração mista de retas no plano do tipo (m, n) é dado, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} R_{m,n} =& mn + \frac{1}{2}n^2 + 2m + \frac{1}{2}n, \\ A_{m,n} =& 2mn + n^2 + 2m, \\ V_{m,n} =& mn + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \end{aligned}$$

Problema 2: Provar que para uma configuração tripolar de retas no plano do tipo (m, n, l), o número de regiões, de arestas e de vértices é dado, respectivamente, por:

$$R_{m,n,l} = (mn + ml + nl) + 2(m + n + l) - 2$$

$$A_{m,n,l} = 2(mn + ml + nl) + 2(m + n + l)$$

$$V_{m,n,l} = (mn + ml + nl) + 3.$$

Problema 3: Generalizar o problema 2 para uma configuração $k-$polar, i. e., com k pólos e m_i retas passando por cada pólo. Por exemplo, mostre que o número total de regiões é:

$$R_k = 2\sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i,j=1,i<j}^{k} m_i m_j - (k - 1).$$

Deixamos para o leitor analisar os vários casos mistos e os casos degenerados de configurações com retas paralelas.

Observação 3. *O leitor pode verificar que em qualquer das configurações tratadas acima, a expressão $\chi = R - A + V$ é igual a 1, independente da configuração e do número de retas. Por exemplo, para uma configuração livre com n retas, segue do teorema 1 que*

$$\chi(n) = R_n - A_n + V_n = 1, \quad \textit{para todo } n.$$

Esta relação algébrica é uma conseqüência da fórmula de Euler-Poincaré para o disco. Para os poliedros convexos sabe-se que $F - A + V = 2$, veja [2] e [7].

1.3 Configurações de Planos no Espaço $\mathbb{R}^3$

A contagem do número de regiões determinadas por uma configuração de planos no espaço tridimensional pode ser feita de modo semelhante ao caso das regiões planas. Analisaremos inicialmente a situação mais simples de n planos contendo um ponto A.

Definição 5. *Uma coleção de n planos distintos em $\mathbb{R}^3$, $\{\pi_1, \cdots, \pi_n\}$, será chamada de configuração monopolar de planos se existir um ponto* (pólo*) pertencente a todos os planos e se não existirem três planos contendo uma mesma reta. As componentes conexas de* $\mathbb{R}^3 \setminus \cup_{i=1}^m \pi_i$ *são chamadas* regiões monopolares.

Proposição 1. *Uma configuração monopolar de n planos divide o espaço* $\mathbb{R}^3$ *em* $n(n-1)+2$ *regiões conexas.*

Demonstração. Por indução observamos que o número de regiões satisfaz a seguinte equação de recorrência linear $R_n = R_{n-1} + 2(n-1)$, $R_1 = 2$. Resolvendo a equação acima obtemos o resultado afirmado. □

Definição 6. *Uma configuração bipolar de planos no espaço, do tipo* (m, n)*, é um conjunto finito de planos,* π_i, $i = 1, \cdots, m$*, e* γ_j, $j = 1, \cdots, n$*, tais que* $A \in \cap_i^m \pi_i$, $B \in \cap_j^n \gamma_j$, $A \neq B$*, que estão em posição geral, i.e.,* $\pi_i \cap \gamma_j \neq \emptyset$ *e* $(\pi_i \cap \gamma_j) \cap \{A \cup B\} = \emptyset$ *e, além disso, o conjunto de retas* $\pi_i \cap \gamma_j$ *não são paralelas para todo* $i \in \{1, \cdots, m\}$ *e* $j \in \{1, \cdots, n\}$*, e os pares de retas distintas* $r_{ij} = \pi_i \cap \pi_j$ *e* $r_{lk} = \gamma_l \cap \gamma_k$ *são reversas. As componentes conexas de* $\mathbb{R}^3 \setminus [\cup_{i=1}^m \pi_i \cup \cup_{j=1}^n \gamma_j]$ *são chamadas* regiões bipolares*.*

A definição acima é bastante natural, estamos exigindo que todos os pares de planos tem intersecção não vazia, e em cada plano individualmente temos uma configuração mista de retas do tipo $(m-1, n)$ ou $(m, n-1)$.

Teorema 3. *O número de regiões de uma configuração bipolar de planos do tipo* (m, n) *é dado por:*

$$R_{m,n} = (m+n)(\frac{mn}{2} - 1) + n^2 + m^2 + 3 \tag{1.1}$$

Demonstração. Denotando por $R_{m,n}$ o número de regiões observamos por indução que:

$$\begin{aligned} R_{0,n} &= 2 + n(n-1) \\ R_{1,n} &= R_{0,n} + \frac{n^2+n+2}{2} \\ R_{m,n} - R_{m-1,n} &= (m-1)(n+2) + \frac{n(n+1)}{2}, \quad m \geq 2 \end{aligned}$$

A primeira equação segue da contagem da configuração monopolar de planos passando por um ponto, enquanto a segunda corresponde a um plano π passando por A o qual tem intersecção não vazia com os n planos passando por B numa configuração livre de retas no plano π possuindo n retas. Esta configuração livre de retas no plano π acrescenta $(n^2 + n + 2)/2$ regiões conexas no espaço.

Dada uma configuração do tipo $(m-1, n)$ com $R_{m-1,n}$ componentes conexas (regiões) ao acrescentarmos mais um plano π passando por A este plano tem intersecção não vazia com todos os n planos passando por B e com todos os $m-1$ planos passando por A, definindo em π uma configuração mista de retas do tipo $(m-1, n)$. Esta configuração mista de retas no plano π acrescenta $(m-1)(n+2)+n(n+1)/2$ regiões conexas no espaço. Assim deduzimos a terceira equação de recorrência linear.

Resolvendo o sistema linear de recorrência obtemos o resultado. De fato,

$$\sum_{k=2}^{m}[R_{k,n} - R_{k-1,n}] = \sum_{k=2}^{m}[(k-1)(n+2) + \frac{n(n+1)}{2}]$$

Portanto,

$$\begin{aligned} R_{m,n} - R_{1,n} =& (n+2)(\sum_{k=2}^{m}(k-1) + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{k=2}^{m}1 \\ =& (n+2)\frac{(m-1)m}{2} + \frac{n(n+1)}{2}(m-1). \end{aligned}$$

Como $R_{1,n} = 2 + (n-1)n + (n^2 + n + 2)/2$ temos,

$$R_{m,n} = \frac{nm(m+n)}{2} + m^2 + n^2 - (m+n) + 3.$$

□

Definição 7. *Uma coleção de n planos distintos em $\mathbb{R}^3$, $\{\pi_1, \cdots, \pi_n\}$, será chamada de* configuração livre *quando os planos estiverem em posição geral, i.e, quando não existir nenhum par de planos paralelos e, além disso, o conjunto de retas $\pi_i \cap \pi_j$ não forem paralelas nem coincidentes duas a duas para todo $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, $i \neq j$. As componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus \cup_{i=1}^{n} \pi_i$ são chamadas regiões livres.*

Observamos que essas regiões são todas poliédricas, convexas, limitadas ou ilimitadas. Observe também que em cada plano considerado isoladamente fica determinada, pela intersecção com os outros planos, uma configuração de retas livres. Deixamos a cargo do leitor provar o teorema a seguir.

Teorema 4. *O número de regiões, de faces, de arestas e de vértices de uma configuração livre de planos é dado, respectivamente, por:*

$$R_n = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}, \qquad F_n = \frac{(n^2-n+2)n}{2},$$

$$A_n = \frac{n(n-1)^2}{2}, \qquad V_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

1.4 Triângulos e Quadriláteros em Configurações Livres

Uma configuração livre de retas no plano determina um certo número de regiões poligonais convexas limitadas ou não, conforme foi visto na seção 1.2. O leitor pode verificar que o número de regiões não limitadas é sempre igual ao dobro do número de retas, por exemplo, numa configuração livre com n retas existem exatamente $2n$ regiões não limitadas e $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ regiões limitadas. Quanto aos polígonos limitados é interessante observar que sempre existirão triângulos entre eles, porém em geral não serão todos triângulos. O conjunto de todas as regiões limitadas determina um polígono que as envolve, a *envoltória* das regiões limitadas, veja Figura 1.2. Este polígono envoltório nunca será um conjunto convexo para configurações livres com pelo menos 4 retas. Deixamos a cargo do leitor providenciar uma prova para este fato. É conhecido que este conjunto é $L-$convexo, [1]. Lembramos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ é chamado $L-$*convexo* quando para quaisquer pontos a e b em A existe uma poligonal formada por dois segmentos de retas inteiramente contida em A e que possui os pontos a e b como extremos.

O número de vértices da configuração que pertence a esse polígono envoltório é variável (depende da configuração), entretanto existe uma limitação inferior para esse número. Propomos o seguinte problema.

Problema 4: Prove que para qualquer configuração livre com $n \geq 4$ retas no plano, o número mínimo de vértices da configuração que pertence à envoltória das regiões limitadas é $2n-2$. Obtenha uma cota superior

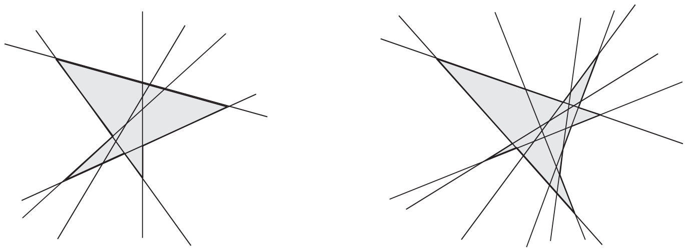


Figura 1.2: Envoltórias de configurações livres

para o número de vértices pertencentes à envoltória. Para todo $n \geq 4$, dê exemplo de uma configuração com esta cota mínima.

Definição 8. *Uma aresta* **a** *de uma região convexa limitada* **R**, *tem orientação* $\oplus$ *se as retas suportes das arestas adjacentes à aresta* **a** *tiverem o ponto de intersecção no semiplano determinado pela reta suporte da aresta* **a** *e que contém a região* **R**.

Na figura 1.3 mostramos as arestas de um pentágono e de um quadrilátero que possuem orientação $\oplus$. As demais arestas do pentágono e do quadrilátero não possuem orientação como definido acima.

Observamos que a definição acima de orientação de uma aresta é relativo à região convexa da qual a mesma é parte da fronteira.

Lema 1. *Um polígono convexo com 4 ou mais arestas tem no máximo duas arestas com orientação* $\oplus$, *sendo as mesmas adjacentes.*

Demonstração. Considere um polígono **P** com k arestas $a_1, a_2, ..., a_k$, $k \geq 4$. Se a orientação da aresta a_1 é $\oplus$, a soma dos ângulos externos à aresta a_1 é maior que $180°$. Suponha que exista uma aresta a_m não adjacente a a_1 com orientação $\oplus$, então a soma dos seus ângulos externos também será maior que $180°$, absurdo pois teríamos um polígono convexo cuja soma dos ângulos externos é maior que $360°$, [5]. Analogamente, se uma das arestas adjacentes à aresta a_1, também tiver orientação $\oplus$, a outra aresta adjacente a a_1 não poderá ter orientação $\oplus$, o que conclui a demonstração. □

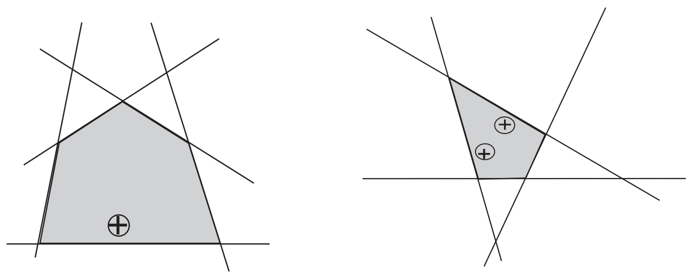


Figura 1.3: Orientação das arestas de um pentágono e de um quadrilátero numa configuração livre

Observação 4. *Numa configuração livre de retas no plano temos que:*

i) Nas regiões triangulares as três arestas tem orientação $\oplus$.

ii) Nas regiões quadrangulares temos sempre duas arestas adjacentes com orientação $\oplus$.

Observação 5. *Numa configuração livre de retas uma aresta comum a duas regiões limitadas sempre possui uma orientação* $\oplus$ *e não poderá ter duas orientações* $\oplus$.

Teorema 5. *Uma configuração livre de* n *retas tem:*

i) No mínimo $n-2$ *triângulos.*

ii) No máximo $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *quadriláteros.*

Demonstração. Observamos novamente que cada aresta limitada de uma configuração livre de retas tem exatamente uma orientação $\oplus$. Por outro lado pelo lema 1 temos que o número máximo de arestas com orientação $\oplus$ em um polígono com mais de 3 arestas é 2.

Seja T o número de triângulos, A_n^l o número de arestas limitadas e R_n^l o número de regiões livres limitadas, incluindo os triângulos. Logo temos que

$$A_n^l \leq 2(R_n^l - T) + 3T,$$

onde $2(R_n^l - T)$ é uma cota superior para o número de orientações $\oplus$ nos polígonos com mais de três arestas e $3T$ representa o número total de orientações $\oplus$ nos triângulos.

Segue diretamente do Teorema 1 que $R_n^l = \frac{n^2+n+2}{2} - 2n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ e $A_n^l = n^2 - 2n = n(n-2)$. Logo temos que

$$T \geq \ n(n-2) - 2\frac{(n-1)(n-2)}{2} = n - 2.$$

Como todo quadrilátero tem duas arestas com orientação $\oplus$, podemos também fazer a estimativa

$$A_n^l \geq 3T + 2Q,$$

onde Q representa o número de quadriláteros. Portanto,

$$Q \leq \frac{n(n-2) - 3(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}. \qquad \square$$

Proposição 2. *Existe uma configuração livre com* $(n-2)(n-3)/2$ *quadriláteros e* $n-2$ *triângulos.*

Demonstração. Para construir uma configuração como especificada tomamos num pequeno arco de uma curva convexa (por exemplo um círculo) n pontos consecutivos e traçamos $n+1$ retas, definindo uma configuração livre, conforme ilustrado na figura 1.4 para $n = 6$. Esta configuração possui, para todo n, somente triângulos e quadriláteros como regiões limitadas e estes atingem as cotas afirmadas. $\square$

Problema 5: Prove que para qualquer configuração livre com n retas no plano o número de triângulos é limitado superiormente por $\frac{n(n-2)}{3}$.

Observação 6. *Podemos também definir orientação de arestas como a seguir:*

Dado uma aresta **a** *de uma configuração livre, dizemos que* **a** *tem orientação* $\oplus$ *no semiplano em que as retas suportes das arestas adjacentes à aresta* **a** *tiverem o ponto de intersecção.*

Com esta definição toda aresta limitada de uma configuração livre possui exatamente uma orientação $\oplus$.

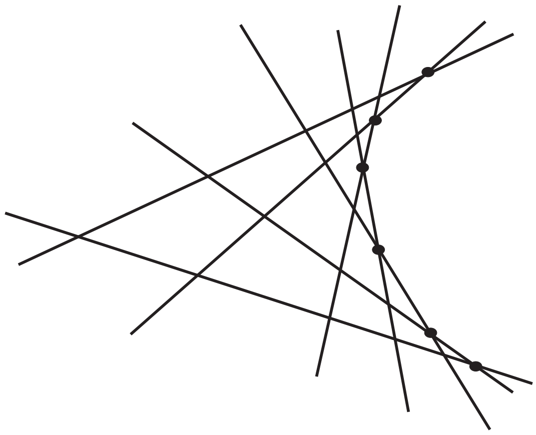


Figura 1.4: Configuração livre de retas com regiões triangulares e quadrangulares

Observação 7. *Esta seção foi motivada inicialmente pelo artigo de G. Pinto, [4]. No referido artigo é proposto e historiado como sendo um problema ainda em aberto obter uma demonstração da cota mínima de* $n-2$ *triângulos usando o princípio de indução finita.*

1.5 Configuração de Círculos na Esfera $\mathbb{S}^2$

Uma configuração de círculos na esfera determina uma decomposição da esfera em regiões. O número de regiões, conforme descreveremos, é um invariante topológico. Por outro lado a forma geométrica das regiões é variável, dependendo da posição relativa dos círculos.

A figura 1.5 mostra uma configuração livre de três círculos na esfera definindo 8 regiões e também a projeção estereográfica da esfera no plano.

Definição 9. *Uma coleção finita de grandes círculos distintos* c_i, $i = 1, \cdots, n$, *será chamada de* configuração livre de círculos na esfera *se os mesmos estão em posição geral, i.e., não existem três círculos passando por um mesmo ponto. As componentes conexas de* $\mathbb{S}^2 \setminus (\cup_{i=1}^{n} c_i)$ *são chamadas* regiões livres *na esfera.*

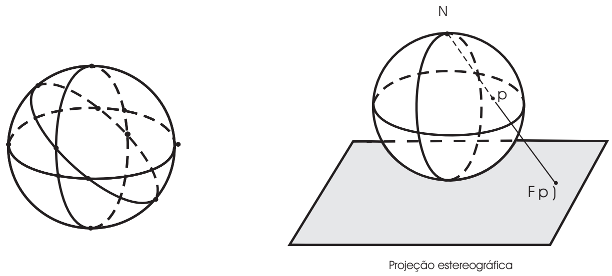


Figura 1.5: Configuração de círculos na esfera e a projeção estereográfica

Como nas seções anteriores, os pontos de intersecções dos círculos são chamados de *vértices* e os arcos de círculo entre vértices consecutivos são chamados de *arestas*. Usando a mesma técnica de contagem das seções anteriores, convidamos o leitor a demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 6. *O número de regiões, de arestas e de vértices, de uma configuração livre de grandes círculos na esfera é dado, respectivamente, por*

$$R_n = n^2 - n + 2, \quad A_n = 2n(n-1), \quad V_n = n(n-1)$$

Observamos que nada há de especial em considerar grandes círculos, poderíamos considerar simplesmente curvas regulares fechadas simples em posição geral, i.e., duas curvas tendo sempre dois pontos de intersecção transversal e não existem três curvas passando por um mesmo ponto. Enfatizamos grandes círculos pela analogia dos mesmos com as retas no plano. Os grandes círculos são as *geodésicas* (curvas que localmente minimizam distância) na esfera.

Observação 8. *Uma configuração de círculos no plano em posição geral, tem as mesmas propriedades de contagem que uma configuração de curvas regulares fechadas e simples na esfera. Para isso observamos que a inversa da projeção estereográfica, com pólo fora do conjunto* $\cup_i^n c_i$*, transforma círculos no plano em curvas regulares fechadas e simples na esfera, mantendo o número de vértices, arestas e regiões.*

1.6 Conclusão

Através de um problema simples de contagem relacionamos duas áreas de grande importância na matemática, a geometria e a combinatória. Embora as idéias usadas sejam simples, as mesmas são de importância teórica e prática em vários contextos. Embora não explicitamente enfatizado, fizemos uso da álgebra linear usando conceitos de dependência linear e dimensão. Para o leitor interessado em aprofundar os seus conhecimentos em Álgebra Linear sugerimos o livro de E. Lima, [3]. Na estimativa para os números de triângulos e quadriláteros usamos o teorema do ângulo externo, [5], [6], [8] . Este teorema diz que a soma dos ângulos externos de um polígono é um invariante e vale $360°$ ou 2π radianos. A demonstração do mesmo está relacionada com o V Postulado de Euclides, assumido na geometria Euclidiana plana. Veja [9] para uma introdução à geometria não euclidiana.

Na *Geometria Diferencial* o correspondente deste resultado é o importante teorema, conhecido como Teorema de Gauss-Bonnet, [7], [11].

Para uma breve nota histórica sobre configurações de retas no plano veja [4]. Este problema remonta ao século XIX, Jakob Steiner (1796 -1863).

As fórmulas de contagens polinomiais obtidas são esperadas pela ordem de grandeza, pela simetria e pela natureza do problema. Por isso julgamos ser natural adotar o procedimento usado nas demonstrações dos resultados.

O leitor poderá argumentar diretamente, usando as informações dos problemas, para exibir outras demonstrações destas fórmulas de contagem.

A bibliografia citada tem também por objetivo despertar o leitor para aprofundar seus conhecimentos em vários ramos da matemática. Esperamos que este artigo de divulgação seja acessível aos alunos do ensino médio, aos professores do ensino fundamental e médio e em parte aos alunos do ensino fundamental.

Finalmente desafiamos o leitor a esboçar a intersecção de duas pirâmides com bases retangulares e contar o número de regiões, fazendo uma análise das várias possibilidades.

Bibliografia

[1] D. Eu, E. Guévremont and T. Toussaint, *On envelopes of arrangements of lines*, Journal of Algorithms, **21**:111-148, (1996).

[2] E. Lima et al., *A Matemática do Ensino Médio*, vol. 02, Col. do Prof. de Matemática, Soc. Bras. de Matemática, (1998).

[3] E. Lima, *Introdução a Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998.

[4] G. Pinto, *Triângulos em Arranjos de Retas no Plano Euclidiano*, Revista Matemática Universitária, Soc. Bras. de Matemática, **30**:115-123, (2001).

[5] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., (1980).

[6] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, *Redécouvrons la Géométrie*, Éditions Jacques Gabay, (1997).

[7] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large*, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000, (1983).

[8] J. Lucas M. Barbosa, *Geometria Euclidiana Plana*, Col. do Prof. de Matemática, Soc. Bras. de Matemática, (1997).

[9] J. Lucas M. Barbosa, *Geometria Hiperbólica,* XII Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, (2002).

[10] S. Felsner and K. Klaus, *Triangles in Euclidean Arrangements*, Discrete and Computational Geometry, **22**:429-438, (1999).

[11] S. Chern, Curves and Surfaces in Euclidean Space, Studies in Global Geometry and Analysis, Math. Assoc. Amer.(1967) pp. 16–56.

Autores: Alacyr Gomes Helvecio P. de Castro e Ronaldo A. Garcia

End: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia -GO - Brasil
alacyr@mat.ufg.br, hpcastro@mat.ufg.br, ragarcia@mat.ufg.br

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Coordenação de Olimpíadas
XII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás/2003

FICHA DE INSCRIÇÃO

ESCOLA: ____

END./CEP:_________________________ FONE: ____________

Municipal ☐ Estadual ☐ Federal ☐ Conveniada ☐ Particular ☐

Local de realização das provass (ver endereços na pág. seguinte):

1-Goiânia ☐ 2-Catalão ☐ 3-Jataí ☐ 4-Rialma ☐
5-Anápolis ☐ 6-Iporá ☐ 7-Itumbiara ☐ 8-Porangatu ☐
9-Quirinópolis ☐

Nível 1 (5ª a 6ª séries)

Nº	Nome	Série	Data de Nascimento
1			
2			
3			
4			
5			

Nível 2 (7ª a 8ª séries)

Nº	Nome	Série	Data de Nascimento
1			
2			
3			
4			
5			

Nível 3 (Ensino Médio)

Nº	Nome	Série	Data de Nascimento
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Local e data: ____________, ______________________

Diretor ou Responsável (nome legível) Assinatura

ENDEREÇOS

1. UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - CAMPUS SAMAMBAIA - GOIÂNIA
   Instituto de Matemática e Estatística
   Rodovia Goiânia/Nerópolis - Campus II
   74001-970 - Goiânia - GO Fone: (62) 521-1208
2. UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - CAMPUS AVANÇADO DE CATALÃO
   Departamento de Matemática, CP: 56
   Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120 - Setor Universitário
   75405-000 - Catalão - GO Fone: (62) 441-3484
3. UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - CAMPUS AVANÇADO DE JATAÍ
   Departamento de Matemática
   Rua Riachuelo, 150 0 Bairro Samuel Grahan
   75800-000 Jataí - GO Fone: (62) 631 1184
4. UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS - EXTENSÃO RIALMA
   Rua Luiz Benedito Dias, s/n, Setor Alvorada
   76310-000 Rialma - GO Fone: (62) 397 1556
5. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - ANÁPOLIS
   Av. JK, nº 146, Bairro Jundiaí
   75110-390 - Anápolis - GO Fone: (62) 328-111
6. COLÉGIO DIOCESANO - ITUMBIARA
   Av. Tabelião B. Dias da Rocha, s/n, Conj. Hab. Paranaíba, Planalto
   75533-140 Itumbiara - Goiás Fone: (64) 343 19250
7. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - IPORÁ
   Av. R-2, Qd. 01, Jardim Novo Horizonte II
   76200-000 Iporá - GO Fone: (62) 674 1651

8. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - PORANGATU
   Av. Brasília nº 32, Setor Leste - Cx.P 91
   76550-000 Porangatu - Goiás

9. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE GOIÁS - QUIRINÓPOLIS
   Av. Brasil, Qd. 03, Lt. 01 - Conjunto Hélio Leão
   75870-000 Quirinópolis - Goiás

Olimpíada de Matemática
do Estado de Goiás

FICHA DE CADASTRAMENTO
(Preencher com letra de forma legível)

Cadastramento ☐ Recadastramento (atualização de dados) ☐

Instituição:

Pública ☐ Conveniada ☐ Privada ☐

Nº de alunos: Ens. Fundamental Ens. Médio

Endereço:

Bairro:

Cep: Cidade: Estado:

Telefone: Fax:

E-mail:

Diretor(a):

Professor Responsável:

Endereço:

Bairro:

Cep: Cidade: Estado:

Telefone: Fax:

E-mail:

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131
CEP: 74001-970 Goiânia - GO

http://www.mat.ufg.br/extensao/olimpiada
E-mail: omeg@mat.ufg.br

Fone: (062) 521 1208 /Fax: (062) 521 1180

Objetivo e Política Editorial

A Revista da OLIMPÍADA tem como objetivo ser um veículo de difusão, principalmente, das Olimpíadas de Matemática do Estado de Goiás, promovidas pelo IME/UFG.

A Revista também está aberta a contribuições de pequenas matérias, subordinados à boa qualidade. O material submetido para a publicação deverá ser de interesse do Ensino Fundamental e Médio, estar bem redigido, em estilo claro, sem aridez, de forma que desperte o interesse do leitor.

Submissão e aceite

Toda matéria submetida para publicação deve ser enviada ao Comitê Editorial. Matérias redigidas em TEX e LATEX podem ser submetidas por e-mail: omeg@mat.ufg.br. Se existirem ilustrações no trabalho submetido, estas devem ser encaminhadas, juntamente com o trabalho, e precisam estar em condições de serem reproduzidas, sem retoques. Além disso, cópias dos desenhos e ilustrações devem ser afixadas em espaços apropriados do texto, exibindo, dessa maneira, como deverá ficar a apresentação final do trabalho.

As referências bibliográficas devem ser colocadas no final do texto, em ordem alfabética, segundo as normas da ABNT.

As matérias submetidas para publicação serão analisadas pelos editores que poderão solicitar pareceres ad hoc e o autor receberá a resposta sobre sua matéria num prazo máximo de 120 dias.

Os autores que tiverem os trabalhos aceitos deverão transferir seus direitos autorais para o Instituto de Matemática e Estatística da UFG.