Nº 7
Set/2008
ISSN 1518-6075

revista DA OLIMPÍADA

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação(CIP)
(GPT/BC/UFG)

Revista da Olímpiada/Universidade Federal de Goiás/
Instituto de Matemática e Estatística.
N º 7 (jan.2007/dez. 2008). Goiânia: Editora da UFG, 2008-v. Anual.
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Editoração	**Arte da Capa**
José H. da Cruz	Leonardo M. Pelá
Tiragem	**Postagem**
2.500 exemplares	2º semestre de 2008

Revista da Olimpíada, nº 7, 2008
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia
Caixa Postal 131
74.001-970 - Goiânia - Goiás
Tel.: (62) 3521 1208, Fax: (62) 3521 1180
Versão eletrônica disponível em: `www.ime.ufg.br`

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás* é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e estudantes do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática.*

Esperamos que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, o leitor faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado transmitindo-o a seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação.

Acreditamos que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade e nossa atenção para este fato é que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, 17 de setembro de 2008
Os Editores.

Universidade Federal de Goiás

Edward Madureira Brasil
Reitor

Benedito Ferreira Marques
Vice-Reitor

Sandramara Matias Chaves
Pró-Reitora de Graduação

Divina das Dores de Paula Cardoso
Pró-Reitora de Pesquisa e Graduação

Orlando Afonso Valle do Amaral
Pró-Reitor de Administração e Finanças

Jeblin Antônio Abraão
Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional e Recursos Humanos

Anselmo Pessoa Neto
Pró-Reitor de Extensão e Cultura

Ernando Melo Filizzola
Pró-Reitor de Assuntos da Comunidade Universitária

Gisele de Araújo Prateado Gusmão
Diretora do Instituto de Matemática e Estatística

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Comissão Organizadora (ano 2006)
Rogério Queiróz Chaves (coordenador), Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues e Fábio Vitoriano e Silva.

Comissão Organizadora (ano 2007)
Rogério Queiróz Chaves (coordenador), Edméia Fernandes da Silva.

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO
Correio eletrônico: omeg@mat.ufg.br Tel:(62)3521-1208 Fax:(62)3521-1180
Site: `www.ime.ufg.br/extensao/olimpiada`

Índice

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 1-19

Coletânea de Problemas

Wérica Pricylla de Oliveira Valeriano [1]
Edméia Fernandes da Silva

Resumo. Nesta seção apresentamos uma coletânea de problemas destinados a alunos e professores interessados não apenas em se prepararem e prepararem seus alunos para participar das Olimpíadas de Matemática que ocorrem no Brasil e no mundo, mas sim para aqueles que gostam da matemática e que gostam de um desafio.

1. Maria escolhe 8 números inteiros e os escreve nos vértices de um cubo. Em cada aresta ela escreve a soma dos números que colocou nos seus extremos. Em cada face ela escreve a soma dos números que colocou nos vértices mais os números que colocou nas arestas que formam esta face. é possível escolher oito números de forma que:

a) todas as faces tenham valor igual a 100?

b) a soma de todos os 26 números seja 1995?

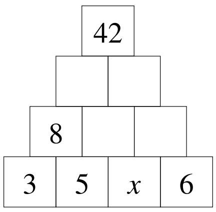
2. Dois homens caminhavam no deserto. Um deles possuia 5 litros de água e 5 pães e o outro trazia 3 litros de água e 3 pães. No momento em que se preparavam para descansar, avistaram um homem que estava bastante exausto e com sede. Resolveram repartir a água e os pães igualmente entre os três. Dois dias depois chegaram a um oásis. Ao se despedir, em sinal de agradecimento, o homem deu 8 moedas de ouro para os dois que tinham salvo a sua vida. Se a divisão foi feita de forma justa, com quantas moedas cada um deles ficou?

3. Na sua festa de aniversário, o jovem Guilherme resolveu fazer a seguinte brincadeira com os seus 5 amigos mais chegados: ele daria sua coleção de bolinhas de gude a quem adivinhasse de que cores eram duas

[1] Graduanda em Matemática/Bolsista/PROEC/UFG, 2006.

bolas que ele havia escondido numa caixa. Ele explicou que as duas bolas tinham cores diferentes, dentre as 6 cores a seguir: verde, amarela, azul, branca, vermelha e preta. Seus amigos deram os seguintes palpites, respectivamente: verde e branca; amarela e branca; amarela e vermelha; azul e vermelha; branca e preta. Guilherme, chateado, comunicou a seus amigos que um deles havia errado as duas cores e os outros tinham acertado uma mas errado a outra. De repente, teve uma idéia luminosa: daria sua coleção a quem, a partir das suas informações, descobrisse as cores das bolas. Carlos Gustavo, que não era bom de adivinhação, mas gostava de quebra-cabeças, deu logo a resposta certa. Mostre como ele descobriu as cores das bolas na caixa.

4. Na figura o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casinha. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas em branco, obtém-se o 42 na casa indicada. Qual o valor de x?



5. Em um quadrado mágico, a soma dos 3 números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. A seguir temos um quadrado mágico, parcialmente preenchido. Qual o valor de x?

1	14	x
26		13

6. Emília inventou uma brincadeira. Escreveu alguns algarismos na primeira linha de uma folha. Depois, na segunda linha, fez a descrição dos algarismos digitados da seguinte maneira: ela apresentou as quantidades de cada um dos que aparecem, em ordem crescente de algarismos. Por exemplo, após digitar 21035662112, ela digitou 1**0**3**1**3**2**1**3**1**5**2**6**, pois em 21035662112 existe um algarismo 0, três algarismos 1, três algarismos 2, um algarismo 3, um algarismo 5 e dois algarismos 6. Emília gostou tanto de fazer isso que decidiu preencher várias folhas com essa brincadeira, começando com 01 na primeira linha da primeira folha. Quais são os dois primeiros algarismos da esquerda do que ela digitou na 2006ª linha?

7. A minha calculadora está avariada pois ao somar dois números só aparece no visor o algarismo das unidades do resultado. Por exemplo, quando somo 6 e 7 aparece 3 no visor. Construí uma lista com 2005 algarismos $8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, ...$ da seguinte forma: o terceiro algarismo da lista e os seguintes são o resultado da soma dos dois algarismos anteriores, como aparece no visor da minha calculadora. Qual é o último algarismo dessa lista?

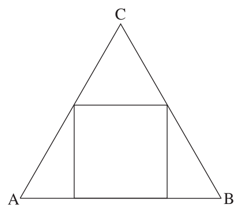
8. Tenho o triplo da idade que você tinhas quando eu tinha a idade que você tem. Quando você tiver a idade que eu tenho, teremos juntos 56 anos. Qual é a minha idade atual?

9. Esmeralda, de olhos vendados, retira cartões de uma urna contendo inicialmente 100 cartões numerados de 1 a 100, cada um com um número diferente. Qual é o número mínimo de cartões que Esmeralda deve retirar para ter certeza de que o número do cartão seja um múltiplo de 4?

10. A mãe de Ana Margarida vende doces e pediu-lhe que embrulhasse 2003 bombons de 5 cores diferentes em pacotes com 3 de forma que em cada pacote os bombons fossem da mesma cor. Como recompensa prometeu-lhe que poderia comer os que restassem quando já não fosse possível fazer mais embrulhos. Sabendo que dos 2003 bombons, 388 eram brancos, 396 amarelos, 406 verdes, 405 vermelhos e 408 castanhos, quantos bombons pôde a Ana Margarida comer e de que cor eram?

11. Considere uma sequência (1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, ...) cujos termos são os inteiros consecutivos em ordem crescente, e na qual o inteiro n ocorre n vezes. Qual o resto da divisão por 5 do 1993^o termo desta sequência?

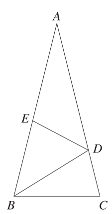
12. Determine o lado do quadrado inscrito em um triângulo equilátero (o quadrado terá dois vértices sobre um lado do triângulo e os outros dois vértices nos outros lados do triângulo).



13. Dez números inteiros (não necessariamente distintos) são tais que, excetuando-se um deles, as somas de todos os outros nove (dependendo daquele que é omitido) são iguais a 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97 e 98. Determine esses números.

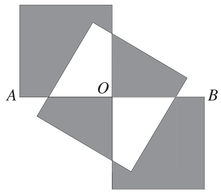
14. Prove que o produto das 99 frações da forma $\frac{k^3-1}{k^3+1}$, k=2, 3, ..., 100 é maior do que $\frac{2}{3}$.

15. Na figura o triângulo ABC é isósceles, $B\widehat{A}C = 20°$ e $BC = BD = BE$. Determine a medida do ângulo $B\widehat{D}E$.



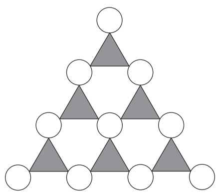
16. Sejam a e b números reais tais que $a^2 = 6b + 5ab$ e $b^2 = 6a + 5ab$. Determine o valor de ab.

17. O desenho à direita representa dois quadrados menores congruentes de lado 20 e um quadrado maior. O vértice O é o único ponto comum aos dois quadrados menores e é o centro do quadrado maior. Os vértices A, O e B estão alinhados e a área da região do quadrado maior não pintada é igual a 36% da área de toda a região pintada. Qual é a área do quadrado maior?



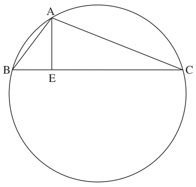
18. Em uma ilha deserta havia três homens e um macaco. Durante o dia os homens colheram cocos e deixaram a partilha para o dia seguinte. Durante a noite, um dos homens acordou e resolveu pegar a sua parte. Dividiu a pilha de cocos em três partes iguais, observou que sobrava um coco, deu este coco para o macaco, retirou e guardou a sua parte. Mais tarde, o segundo homem acordou e fez a mesma coisa que o primeiro, dando também um coco para o macaco. Uma hora depois, o terceiro homem acordou e repetiu o que os outros dois haviam feito, dando um coco para o macaco. Na manhã seguinte os três homens, sem contar uns aos outros que já tinham pego "sua parte", repartiram os cocos que restavam em partes iguais, observaram que sobrou um coco e deram-no para o macaco. Qual é o menor número de cocos que a pilha inicial poderia ter?

19. Distribuir os números 0, 1, 2, ..., 9 pelos círculos da figura abaixo de forma que a soma dos números colocados nos vértices de cada triângulo sombreado seja a mesma para todos os triângulos. Descubra quantas soluções diferentes existem (não vale rodar o triângulo ou fazer simetrias).



20. A equação $x^3 + px + q = 0$ tem três raízes reais distintas. Prove que $p < 0$.

21. Num triângulo ABC, seja E o pé da altura desde A sobre BC. Demonstrar que $AE = \frac{b.c}{2r}$, onde r é o raio da circunferência circunscrita, $b = AC$ e $c = AB$.

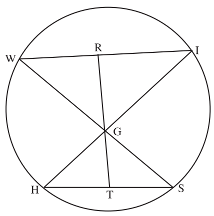


22. Seja n inteiro positivo. De quantas maneiras podemos distribuir $n+1$ brinquedos distintos para n crianças de modo que toda criança receba pelo menos um brinquedo?

23. A circunferência inscrita no triângulo ABC tem o centro O e é tangente aos lados BC, AC e AB nos pontos X, Y e Z, respectivamente. As retas BO e CO intersectam a reta YZ nos pontos P e Q respectivamente. Demonstrar que se os segmentos XP e XQ têm o mesmo comprimento, então o triângulo ABC é isósceles.

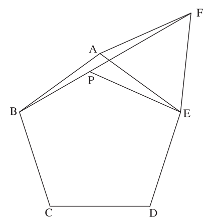
24. A sequência F_n é definida por $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 3$. Encontre todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que $F_m.F_n = mn$.

25. Na figura WS e HI são cordas que se intersectam no ponto G, e RT é bissetriz do ângulo $W\widehat{G}I$. Prove que $\overline{WR} \cdot \overline{TS} = \overline{RI} \cdot \overline{HT}$.



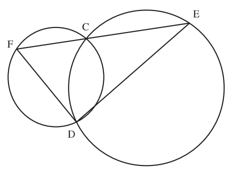
26. Mostre que o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio R é $P_n = 2nR\,\mathrm{sen}(\frac{180}{n})$.

27. Na figura, $ABCDE$ é um pentágono regular e AEF é um triângulo equilátero. Seja P um ponto sobre o segmento BF, no interior de $ABCDE$, e tal que o ângulo $P\widehat{E}A$ mede 12^o, como mostra a figura abaixo. Calcule a medida em graus, do ângulo $P\widehat{A}C$.



28. Determine todas as soluções da equação $n2^{n-1} + 1 = m^2$, com n e m naturais.

29. São dadas duas circunferências secantes, com pontos de intersecção C e D. Traça-se por C uma secante às duas circunferências, que intercepta uma delas em E e a outra em F. Mostre que o ângulo $E\widehat{D}F$ é constante.



30. Uma seqüência é definida por $a_1 = 8,\ a_2 = 18$ e $a_{n+2} = a_{n+1}a_n$ para todo natural $n \geq 1$. Determine todos os valores de n para os quais a_n é quadrado perfeito.

Soluções da Coletânea de Problemas

1. a) Sejam a, b, c, d, nesta ordem, os números escolhidos para os vértices de uma das faces. As arestas desta face terão números iguais a: $a+b, b+c, c+d, d+a$, e o número da face será $a+b+c+d+(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a) = 3a+3b+3c+3d = 3(a+b+c+d)$.

Logo, o valor das faces é múltiplo de três, e como 100 não é múltiplo de três, nenhuma face pode ter esse valor.

b) Sejam a, b, c, d, e, f, g, h os números escolhidos para os vértices. A soma dos 26 números é igual a;

$$\underbrace{a+b+c+d+e+f+g+h}_{\text{vértices}} +$$

$$\underbrace{\begin{aligned}&+(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)+(a+e)+(b+f)+\\&+(d+h)+(c+g)+(e+f)+(e+h)+(h+g)+(g+f)+\end{aligned}}_{\text{arestas}}$$

$$\underbrace{\begin{aligned}&+3(a+b+c+d)+3(a+e+f+b)+3(e+f+g+h)+\\&+3(h+g+c+d)+3(a+e+d+h)+3(b+f+c+g)\end{aligned}}_{\text{faces}},$$

que é igual a $13(a+b+c+d+e+f+g+h)$. Logo, a soma é múltiplo de 13, e como 1995 não é múltiplo de 13, não é possível fazer tal escolha.

2. Sejam, A o homem que possuía 5 pães e 5 litros de água, e B o homem que possuía 3 pães e 3 litros de água. Somando o que cada homem possuía, temos 8 pães e 8 litros de água.

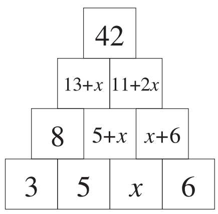
Cada um dos três homens comeu e bebeu quantidades iguais de pães e água, respectivamente, logo cada homem comeu $\frac{8}{3}$ de pães e bebeu $\frac{8}{3}$ litros de água.

Então o homem A doou ao homem que nada tinha $5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$ de pães e $\frac{7}{3}$ litros de água, e o homem B doou $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ de pão e $\frac{1}{3}$ de litro de água. Portanto, para a recompensa ser distribuída de maneira justa, o homem A deve receber 7 moedas e o homem B, 1 moeda.

3. Se umas das bolas não fosse branca, as bolas deveriam ser de duas das três cores: verde, amarelo ou preto. Mas isso é absurdo, pois teríamos dois palpites completamente errados: o azul e vermelho e o branco e uma das cores verde, amarelo ou preto. Logo o branco é uma das cores e obviamente o amarelo, verde e o preto não são uma das cores, pois ninguém adivinhou as cores.

O vermelho também não é uma das cores, pois do contrário não teríamos palpites completamente errado. Logo o palpite completamente errado é amarelo e vermelho e as cores certas são branco e azul.

4. Usando a regra dada na questão, podemos preencher as linhas da seguinte forma,



Assim, $42 = 13 + x + 11 + 2x = 24 + 3x$. Logo, $x = 6$.

5. Seja y, o número no canto superior direito do quadrado mágico. Temos, pela regra do quadrado mágico, que a soma ao longo da diagonal que contém y deve ser a mesma que a soma da coluna que o contém, ou seja,

$$26 + 14 + y = y + x + 13 \Rightarrow 26 + 14 = x + 13 \Rightarrow x = 27\,.$$

6. Emília escreveu em cada uma das primeiras linhas, na seguinte ordem, 01, 1011, 1031, 102113, 10311213, 10411223, 1031221314, 1041222314, 1031321324, 1031223314, 1031223314, ..., e percebeu que, a partir da 10ª linha, o número 1031223314 começa a repetir.

Portanto os dois primeiros algarismos da esquerda do número que ela digitou na 2006ª linha serão 1 e 0.

7. Sabendo que a primeira parte da seqüência é 8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, se continuarmos a seqüência teremos 8, 6, 4, 0, 4, 4, 8, 2, 0, 2, 2, 4, 6, 0, 6, 6, 2, 8, 0, 8, 8, 6, 4, ..., logo podemos perceber que a partir do 20º algarismo a seqüência começa a repetir. Como $2005 = 100$ x $20 + 5$, é só analisarmos o 5º número da seqüência, assim o último algarismo é o número 4.

8. Tu tinhas uma idade que chamaremos de x e hoje tens uma idade que chamaremos de y. Eu tenho o triplo da idade que tu tinhas quando eu tinha a tua idade atual y, ou seja eu tenho $3x$. Eu tinha y e agora tenho $3x$, portanto temos

$$y - x = 3x - y \Rightarrow \ 4x = 2y \Rightarrow \ x = \frac{1}{2}y\,.$$

Então, substituindo o valor de x, temos: tu tinhas $\frac{1}{2}y$ e agora tens y. Eu tinha y e agora e agora tenho $\frac{3}{2}y$.

Olhando para a segunda frase: quando tu tiveres a idade que eu tenho, teremos juntos 56 anos.

Tu tens y e para ter minha idade deve-se somar à tua idade $\frac{1}{2}y$, assim você terá $\frac{3}{2}y$. Como somamos $\frac{1}{2}y$ à tua idade devemos somar à minha também, assim eu terei $2y$, daí temos:

$$\frac{3}{2}y + 2y = 56 \Rightarrow \frac{7}{2}y = 56 \Rightarrow y = 16.$$

Logo, a minha idade é $\dfrac{3}{2} \times 16 = 24$ anos.

9. Como de 1 a 100 existem 25 múltiplos de 4, 75 números não são múltiplos de 4, como Esmeralda corre o risco de tirar esses 75 números respectivamente, ela deve tirar no mínimo 76 números para garantir que um deles é múltiplo de 4.

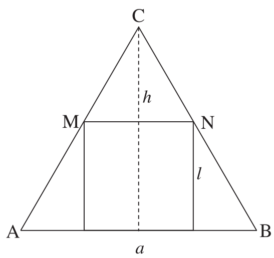
10. Sabemos que dos 2003 bombons, 388 eram brancos, 396 amarelos, 405 vermelhos, 406 verdes e 408 castanhos. Como $396, 405$ e 408 são múltiplos de três, não sobraram bombons amarelos, vermelhos e castanhos. Mas, como $388 = 129$ x $3 + 1$, $406 = 135$ x $3 + 1$, sobrou-lhe um bombom branco e um verde, Então Ana Margarida comeu dois bombons, um branco e um verde.

11. Observe que até o último 1 escrevemos 1 número. Até o último 2 escrevemos $1+2$ números. Até o último 3 escrevemos $1+2+3$ números. Até o último 4 escrevemos $1+2+3+4$ números, etc.

Como a seqüência foi construída respeitando esta condição, temos que até o último número do tipo k teremos escrito $1+2+3+\cdots+k$ números. Mas essa soma $1+2+3+\cdots+k$ é igual a $\frac{(1+k)k}{2}$ (soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética,ver [6], pág. 51-60 e 61-70) então façamos essa soma igual a 1993.

Se $\frac{(1+k)k}{2} = 1993$, teremos $k^2+k-3986=0$, que, resolvendo, nos dá $k \cong -63,6$ (não convém) e $k \cong 62,6$. Mas esse resultado é estranho, já que k deve ser um número inteiro. O que aconteceu? Certamente o 1993^o número escrito não é o último de uma seqüência de números iguais. Vejamos se k for igual a 62, teremos $\frac{(1+62).62}{2} = 1953$, que significa que o 1953º número desta seqüência é o último 62 escrito. Logo, o 1993º número é um dos números 63 que serão colocados na seqüência, como $63 = 12\times 5+3$, o resto da divisão por 5 é 3.

12. Sejam, a o lado do triângulo equilátero, l o lado do quadrado, e $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ a altura do triângulo equilátero.



Temos que MN é paralelo a AB, logo $M\hat{N}C = A\widehat{B}C = 60^o$ e $N\widehat{M}C = B\widehat{A}C = 60^o$, então MNC é equilátero de lado l. Como os triângulos MNC e ABC são semelhantes, temos:

$$\frac{l}{a} = \frac{h-l}{h} \Rightarrow lh = ah - la \Rightarrow l = \frac{ah}{a+h}.$$

Logo,

$$l = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a+a\sqrt{3}}\frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

13. Sejam $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_{10}$ os dez inteiros e seja $S = n_1 + n_2 + \cdots + n_{10}$ a sua soma. Excetuando-se n_1, a soma resultante é $S - n_1$; da mesma forma, se n_2 for excetuado, o resultado é $S - n_2$ e assim sucessivamente. Se os 10 forem adicionados, obtemos

$$(S - n_1) + (S - n_2) + \cdots + (S - n_{10}) = 10S - S = 9S.$$

Se obtemos apenas 9 resultados distintos,conforme enunciado, alguma soma é repetida. Seja x esta soma repetida, então a soma dos 10 resultados é:

$$90 + 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + x$$

Pelo argumento acima, esta soma é também igual $9S$; daí $846 + x = 9S$, o que nos leva a $x = 9(S - 94)$ e isto nos mostra que $x = 90$ e $S = 104$. Subtraindo-se $90, 91, 92, \cdots, 98$, com 90 ocorrendo duas vezes, obtemos os inteiros $6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ e 14.

14. Seja

$$P = \frac{(2^3 - 1).(3^3 - 1).(4^3 - 1)\cdots(100^3 - 1)}{(2^3 + 1).(3^3 + 1).(4^3 + 1)\cdots(100^3 + 1)}.$$

Uma vez que $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ e $n^3 + 1 = (n + 1)(n^2 - n + 1)$ temos:

$$P = \frac{(1 \times 7).(2 \times 13).(3 \times 21)\cdots(99 \times 10101)}{(3 \times 3).(4 \times 7).(5 \times 13)\cdots(101 \times 9901)}.$$

Agora, um exame nada complicado nos conduz aos seguintes resultados: Para um dado k, o primeiro fator na fatoração de $(k + 2)^3 - 1$ é igual ao primeiro fator de $k^3 + 1$, ou seja, $k + 1$. Além disso, o segundo fator de $k^3 - 1$, que é $k^2 + k + 1$, é igual ao segundo fator de $(k + 1)^3 + 1$.

Logo

$$P = \frac{1 \times 2 \times 10101}{3 \times 100 \times 101} = \frac{2}{3} \times \frac{10101}{10100}$$

Como $\frac{10101}{10100} > 1$, temos $P > \frac{2}{3}$.

15. Como ABC é isósceles, temos que $\widehat{B} = \widehat{C}$, e que $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$ então, $2\widehat{B} = 160^o$ portanto $\widehat{B} = 80^o$ e $\widehat{C} = 80^o$. No triângulo, $BC = BD$ então $\widehat{C} = C\widehat{D}B = 80^o$. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, temos que $C\widehat{B}D = 20^o$.

Ora $\widehat{B} = E\widehat{B}D + C\widehat{B}D$, portanto $80^o = 20^o + E\widehat{B}D$ logo $E\widehat{B}D = 60^o$. Sabemos que no triângulo BED, $BE = BD$. Temos que o ângulo $B\widehat{E}D = B\widehat{D}E$, logo $2B\widehat{D}E = 120^o \Rightarrow B\widehat{D}E = 60^o$.

16. Subtraindo as duas equações dadas temos, $a^2 - b^2 = 6(b-a)$, como $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ temos $(a-b)(a+b+6) = 0$. Como $a \neq b$, temos $a + b = -6$.

Elevando $a+b = -6$ ao quadrado $a^2+b^2 = 36-2ab$. Agora, somando as equações dadas no enunciado e usando o fato que $a + b = -6$ temos, $a^2+b^2 = 6(b+a)+10ab = -36+10ab$. Portanto, $-36+2ab+10ab = 36$, o que nos dá $ab = 6$.

17. Como o centro do quadrado maior está no encontro dos vértices dos quadrados menores, temos que os quadrados menores dividem o quadrado maior em quatro quadriláteros congruentes. Logo, a área pintada é igual a soma das áreas dos quadrados menores, ou seja, $2 \times (20 \times 20) = 800$. Como a área pintada do quadrado maior é igual à sua área não pintada, concluímos que a área total do quadrado maior é igual a 72% da área total pintada, ou seja, $0,72 \times 800 = 576$.

18. Seja x a quantidade de cocos que eles colheram.

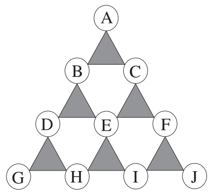
O 1º homem: dá um coco para o macaco, pega $\frac{x-1}{3}$ cocos para ele, sobrando assim $\frac{2}{3}(x-1)$ cocos.

O 2º homem: dá um coco para o macaco, pega $\frac{\frac{2}{3}(x-1)-1}{3}$ cocos para ele, e sobram $\frac{4}{9}(x-1) - \frac{2}{3}$ cocos.

O 3º homem: dá um coco para o macaco, pega $\frac{\frac{4}{9}(x-1)-\frac{5}{3}}{3}$ cocos para ele e sobram $\frac{8}{27}(x-1) - \frac{10}{9}$ cocos.

De manhã há ainda $\frac{8}{27}(x-1) - \frac{10}{9}$ cocos. Dando um coco para o macaco sobram $\frac{8}{27}(x-1) - \frac{10}{9} - 1$ cocos e esse número deve ser múltiplo de três, ou seja, $\frac{8}{27}(x-1) - \frac{10}{9} - 1 = 3y$. Com isso temos a seguinte equação: $8x - 81y = 65$. Resolvendo essa equação diofantina, ver [7] pág. 110-118, segue que $x = 81t - 2$ e $y = 8t - 1$. O menor valor de t que torna y positivo é $t = 1$. Logo, para $t = 1$ temos $x = 79$.

19. Sejam A, B, C, D, E, F, G, H, I e J os números que estão nos círculos, conforme a figura abaixo.



Como $A, B, \ldots, J$ valem $0, 1, 2, \ldots, 9$, tem-se $A + B + C + D + E + F + G + H + I + J = 45$. Além disso

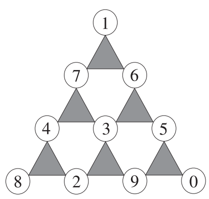
$$A + B + C = B + D + E = C + E + F = D + G + H$$
$$= E + H + I = F + I + J = x$$

A soma dos números dos três triângulos que não contêm E vale $3x = 45 - E$. Daí E só pode ser $0, 3, 6$ ou 9, caso contrário x não seria inteiro.

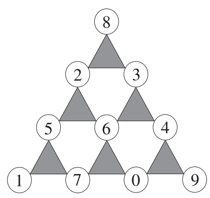
Nota-se ainda que E está em três triângulos, logo devem existir B, C, D, F, H, e I tais que $B + D = C + F = H + I = x - E$.

- $E = 0 \Rightarrow x = 15$ e $x - E = 15$ só pode ser escrito como $7 + 8$ ou $9 + 6$, mas são necessárias 3 somas, logo não pode ser 0.
- $E = 3 \Rightarrow x = 14$ e $x - E = 11$ pode ser escrito como $5 + 6$ ou $7 + 4$ ou $2 + 9$. Então $E = 3$ é possível.
- $E = 6 \Rightarrow x = 13$ e $x - E = 7$ pode ser escrito como $0 + 7$ ou $2 + 5$ ou $4 + 3$. Então $E = 6$ é possível.
- $E = 9 \Rightarrow x = 12$ e $x - E = 3$ só pode ser escrito como $0 + 3$ ou $1 + 2$. Logo E não pode ser 9.

Assim temos duas soluções:



Caso $E = 3$



Caso $E = 6$.

20. Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação.

Pelas Relações de Girard temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad \text{e} \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p.$$

Como

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3),$$

$$0 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2p\, p = \frac{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{2}.$$

Como x_1, x_2 e x_3 são distintos então $x_1^2+x_2^2+x_3^2>0$ e $p<0$.

21. Seja AD o diâmetro que sai do ponto A. Como $A\widehat{D}C$ e $A\widehat{B}C$ subentendem o mesmo arco, temos que $A\widehat{D}C = A\widehat{B}E$.

O triângulo ADC é retângulo em $\widehat{C}$ pois AD é diâmetro da circunferência. Sendo $A\widehat{E}B = 90^o$, temos que o triângulo ABE é semelhante ao triângulo ADC, então

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{c}{2r} = \frac{AE}{b}. \quad \text{Logo, } AE = \frac{b.c}{2r}.$$

22. Observe que teremos 1 criança com 2 brinquedos, enquanto cada uma das $n-1$ crianças restantes terá apenas 1 brinquedo. Assim, temos n possibilidades para a escolha da felizarda criança, e $\binom{n+1}{2}$ possibilidades para escolher os dois brinquedos desta criança. Restando $n-1$ brinquedos e $n-1$ crianças, temos $(n-1)!$ modos de distribuir estes brinquedos entre estas crianças. Assim, temos um total de

$$n\binom{n+1}{2}(n-1)! = \binom{n+1}{2}n!$$

modos de distribuir os $n+1$ brinquedos entre as n crianças.

23. Temos que XP e XQ têm o mesmo comprimento, logo subentendem arcos congruentes, daí temos que $P\widehat{O}X = Q\widehat{O}X$. Como a circunferência é tangente ao triângulo ABC, temos que $OZ \perp AB$, $OX \perp BC$ e $OY \perp AC$.

Assim, temos que $X\widehat{B}Z = 180^o - \alpha$ e que $X\widehat{C}Y = 180^o - \alpha$, então $X\widehat{B}Z = X\widehat{C}Y$, onde $\alpha = P\widehat{O}X$. Logo, o triângulo é isósceles.

24. Os primeiros valores da seqüência são: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$.

Nota-se que, para $n > 7,\ F_n > 2n$. De fato, por indução, se $F_n > 2n$ e $F_{n+1} > 2(n+1)$ então

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n > 2(n+1) + 2n > 2(n+2).$$

Portanto $F_n > 2n > n$ para $n > 7$, de modo que para resolver as equações $F_n = n$, basta testar os valores de n menores ou iguais a 7.

Se $n > 5$, de $F_m F_n = mn$ devemos ter $F_m < m$, onde $m < 5$. Logo pelo menos um dos números m e n deve ser no máximo 5. Suponha, sem perda de generalidade, $n \leq 5$. Observando os possíveis valores de n:

- $n = 1 \Rightarrow F_m = m$, cujas soluções são $m = 1$ e $m = 5$.
- $n = 2 \Rightarrow F_m = 2m$, que não possui solução.
- $n = 3 \Rightarrow 2F_m = 3m$, que não possui solução.
- $n = 4 \Rightarrow 3F_m = 4m$, que possui uma única solução $m = 6$.
- $n = 5 \Rightarrow F_m = m$, cujas soluções são $m = 1$ e $m = 5$.

Assim os pares (m, n) que satisfazem a relação pedida são:

$$(1,1), (1,5), (4,6), (5,1), (5,5), (6,4).$$

25. Sabemos que $I\widehat{G}R = W\widehat{G}R$ e como $H\widehat{G}T$ e $S\widehat{G}T$ são opostos pelo vértice a $I\widehat{G}R$ e $W\widehat{G}R$, logo

$$I\widehat{G}R = W\widehat{G}R = H\widehat{G}T = S\widehat{G}T.$$

Como os ângulos $W\widehat{I}H$ e $W\widehat{S}H$ subentendem o mesmo arco$\overline{WH}$, eles são congruentes, analogamente provamos que $S\widehat{H}I = S\widehat{W}I$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180^o temos que $S\widehat{T}G = T\widehat{R}G$ e que $H\widehat{T}G = W\widehat{R}G$.

Assim, $WRG \cong HTG$ e $IGR \cong STG$. Portanto,

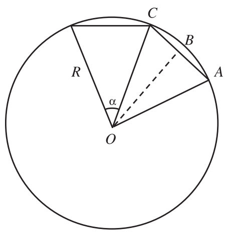
$$\frac{\overline{WR}}{\overline{HT}} = \frac{\overline{RI}}{\overline{TS}} \Rightarrow \overline{WR} \cdot \overline{TS} = \overline{RI} \cdot \overline{HT}.$$

26. Seja AC um dos lados do polígono e α o ângulo $A\widehat{O}C$, onde O é o centro da circunferência. Temos que $\alpha = \frac{360^o}{n}$. Seja $\overline{OB}$ a bissetriz do ângulo α, logo, $\frac{\alpha}{2} = \frac{180^o}{n}$. Como $\overline{AC} = 2\overline{AB}$, pois o triângulo AOC é isósceles e usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo AOB temos,

$$\text{sen}\,(\frac{180^o}{n}) = \frac{\overline{AB}}{R} \Rightarrow \overline{AB} = R\,\text{sen}\,(\frac{180^o}{n}).$$

Então $\overline{AC} = 2R\,\text{sen}\,(\frac{180^o}{n})$, e como o perímetro do polígono a soma de todos os lados,

$$P_n = n\overline{AC} \Rightarrow P_n = 2nR\,\text{sen}\,(\frac{180^o}{n}).$$



27. Primeiro observamos que os ângulos internos de um pentágono regular medem $\frac{(5-2).180^o}{5} = 108^o$. O triângulo AEF é equilátero, logo, $\widehat{A} = \widehat{E} = \widehat{F} = 60^o$. Como $B\widehat{A}F = B\widehat{A}E + E\widehat{A}F$, $B\widehat{A}F = 168^o$ e como o triângulo BAF é isósceles, $A\widehat{B}F = A\widehat{F}B = 6^o$.

No triângulo PEF, temos

$$E\widehat{F}P = 60^o - 6^o = 54^o, \quad P\widehat{E}F = 60^o + 12^o = 72^o \text{ e}$$

$$F\widehat{P}E = 180^o - 72^o - 54^o = 54^o.$$

Logo o triângulo PEF é isósceles, com $PE = FE$. Então o triângulo APE também é isósceles com $AE = PE$ e $P\widehat{A}E = A\widehat{P}E = \frac{180^o - 12^o}{2} = 84^o$. O triângulo CAB é isósceles, daí $C\widehat{A}B = \frac{180^o - 108^o}{2} = 36^o$, além disso $C\widehat{A}E = 108^o - 36^o = 72^o$. Portanto,

$$P\widehat{A}C = P\widehat{A}E - C\widehat{A}E = 84^o - 72^o = 12^o.$$

28. A equação é equivalente a $n2^{n-1} = (m+1)(m-1)$. Observe que se $n = 1, 2, 3,$ ou 4 temos $m^2 = 2, 5, 13,$ ou 33, respectivamente, o que implica que m não é um número inteiro. Podemos supor então que

$n > 4$. Como m^2 é ímpar, temos m ímpar, digamos $m = 2l + 1$. A equação fica então $n2^{n-3} = l(l+1)$. Portanto, 2^{n-3} divide l ou $(l+1)$. Assim, $l + 1 \geq 2^{n-3}$ e $l \leq n$, onde $n + 1 \geq 2^{n-3}$.

Mostraremos, por indução, ver [6] pág.71-78, que $n + 1 < 2^{n-3}$ para $n > 5$. Para $n = 6$ (base de indução), temos $6 + 1 = 7$ e $2^{6-3} = 8$.

Supondo que a desigualdade é válida para $n = k$, provemos que a mesma é válida para $n = k + 1$ (passo indutivo).

De fato, por hipótese de indução temos $k + 1 < 2^{k-3}$. Como $k + 2 < 2(k+1)$, temos $k + 2 < 2^{k-2}$, completando a demonstração.

Assim, basta testar $n = 0$ e $n = 5$. Portanto as soluções são $(m, n) = (1, 0)$ e $(m, n) = (9, 5)$.

29. Trace por C uma secante as duas circunferências que às interceptam em G e H. Temos que $\widehat{F} + \widehat{E} + E\widehat{D}F = 180^o$ e $\widehat{H} + \widehat{G} + H\widehat{D}G = 180^o$.

O ângulo $E\widehat{F}D$ subtende o arco $\widehat{CD}$, e o ângulo $G\widehat{H}D$ também subtende o arco $\widehat{CD}$, logo $E\widehat{F}D = G\widehat{H}D$. Analogamente provamos que $F\widehat{E}D = H\widehat{G}D$.

Assim, temos que $E\widehat{D}F = 180^o - E\widehat{F}D - F\widehat{E}D$ e $G\widehat{D}H = 180^o - E\widehat{F}D - F\widehat{E}D$.

Logo, $E\widehat{D}F = G\widehat{D}H$ para qualquer reta que passe por C e seja secante às duas circunferências.

30. Observamos que $a_1 = 2^3$, $a_2 = 3^2.2$, $a_3 = 2^4.3^2 = (2^2.3)^2$, $a_4 = 2^5.3^4$, $a_5 = 2^9.3^6$, $a_6 = 2^{14}.3^{10} = (2^7.3^5)^2$, $a_7 = 2^{23}.3^{16}$. Assim, a_n é quadrado perfeito quando os expoentes do 2 e do 3 forem pares. Os expoentes do 3 são sempre pares por serem uma soma de dois pares. Os expoentes do 2 formam uma seqüência assim definida:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_2 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + b_{n-1}\,,\ n \geq 2. \end{cases}$$

Considerando b_n módulo 2:

$$\begin{array}{ccc} b_1 \equiv 1, & b_2 \equiv 1, & b_3 \equiv 0, \\ b_4 \equiv 1, & b_5 \equiv 1, & b_6 \equiv 0, \\ & \cdots & \end{array}$$

Como a seqüência é determinada por dois valores consecutivos b_n e b_{n+1}, temos que ela é periódica módulo 2, com período 3. Assim a_n é quadrado perfeito se, e somente se, n é múltiplo de 3.

Bibliografia

[1] Barbosa, J. L. M., *Geometria Euclidiana Plana*, Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2004.

[2] Moreira, C. ; Motta, E.; Tengan, E.; Amâncio, L.; Saldanha, N.; Rodrigues, P.; *Olimpíadas Brasileiras de Matemática- 9ª a 16ª* ,SBM, 2003.

[3] *Olimpíada Iberoamericana de Matemática e Olimpíada Internacional de Matemática*, em www.obm.org.br/provas.htm#imo

[4] *Olimpíadas Portuguesas de Matemática*, www.mat.uc.pt/∼opm

[5] *Revista do Professor de Matemática, nº 16*, São Paulo, SBM, 1990.

[6] *Revista da Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás*, nº 2 e nº 3, 2001/2.

[7] Santos, A. L.; Wagner, E.; Agostino, R. F. W.; *Olimpíada de matemática do Estado do Rio de Janeiro*, São Paulo: Atual; Rio de Janeiro : SBM, 1996.

Edméia Fernandes da Silva

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
edmeia@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 20-23

Classificados na XIV OMEG - 2005

Nível 1 ($5^{\underline{a}}$ e $6^{\underline{a}}$ Séries do Ensino Fundamental)

- Primeiro Lugar
  - ⋆ *Marcelo Abdala Daher*/Colégio Crescer - Anápolis.
- Segundo Lugar
  - ⋆ *Júlio Ferreira Soares Filho*/Colégio Galileu - Anápolis.
- Terceiro Lugar
  - ⋆ *Iuri Rezende Souza*/Ed. Nascentes do Araguaia - Mineiros.
  - ⋆ *Franco Puglisi*/Colégio Galileu - Anápolis.
  - ⋆ *André Santiago Beires*/ Colégio Crescer - Anápolis.
- Menção Honrosa
  - ⋆ *Danilo Rebouças Fernandes de Lima*/Col. Agostiniano - Goiânia.
  - ⋆ *Fernanda Luíza Horácio Buta*/Colégio Crescer - Anápolis.
  - ⋆ *Mateus Miranda Andrade*/Colégio Crescer - Anápolis.
  - ⋆ *Mariana Gomes Gerais*/Colégio Crescer - Anápolis.
  - ⋆ *Jhonantans Moraes Rocha*/Colégio Interação - Ap. de Goiânia.
  - ⋆ *Douglas Florêncio de Sousa*/Colégio Ateneu Dom Bosco - Goiânia.
  - ⋆ *Igor Muniz Soares*/Colégio Expovest - Goiânia
  - ⋆ *Lucas Moraes Silva*/Colégio Expovest - Goiânia
  - ⋆ *Pedro Maurício de Sousa*/Colégio Crescer - Anápolis.

Nível 2 (7ª e 8ª Séries do Ensino Fundamental)

- Primeiro Lugar

⋆ *Pedro Victor Aniz Gomes de Oliveira*/Inst. Maria Auxiliadora - Goiânia

- Segundo Lugar

⋆ *Sara de Oliveira Santos*/Inst. Presbiteriano de Educação - Goiânia

- Terceiro Lugar

⋆ *Nicolas Cruvinel Lindo*/Colégio Santo Agostinho - Goiânia

- Menção Honrosa

⋆ *Alice Duarte Scarpa*/Colégio Pré-medico - Goiânia

⋆ *Mariana Rodrigues Alves*/Inst. Presbiteriano de Educação - Goiânia.

⋆ *Pedro Arthur F. Borges*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *Murilo Antunes de Castro*/Colégio Disciplina - Goiânia.

⋆ *Filipe R. Parrode*/Colégio Victória Figueiredo - Goiânia.

⋆ *David Issa Mattos*/Colégio Crescer - Anápolis

⋆ *Xênia Larissa Motta Fernandes*/Inst. Mª Auxiliadora - Goiânia.

⋆ *André Cardoso Bernardes*/Colégio Disciplina - Goiânia.

⋆ *Amanda Barroso de Freitas*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Marina Berquó Peleja*/Inst. Presbiteriano de Educação - Goiânia.

⋆ *Juliana de Faria Silva*/Colégio Ateneu Dom Bosco - Goiânia.

⋆ *Ian Castilho Caldeira Brant*/Colégio Santo Agostinho - Goiânia.

⋆ *Duílio Cardoso de Sá*/Col. E. Dom Pedro I - Aparecida de Goiânia.

⋆ *Arthur Magalhães de Oliveira*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Bruno Araújo França*/Colégio Marista - Goiânia.

⋆ *Laura Izidoro Salerno*/Núcleo Educativo - Catalão.

⋆ *Marcos Celestino Carvalho Júnior*/Colégio Goyases - Goiânia.

⋆ *Bruno Vargas Adorno*/Centro Ed. Sesc Cidadania - Goiânia.

⋆ *João Victor Batista Gordo*/Colégio Agostiniano - Goiânia.

⋆ *Lara Cristina Duarte*/Núcleo Educativo - Catalão.

⋆ *Davi de Castro Silva*/Colégio Marista - Goiânia.

⋆ *Danilo Sulino S. Pinto*/Colégio Discplina - Goiânia.

⋆ *Héricka de Paula Bento*/Colégio Galileu - Anápolis.

⋆ *Luciano Gomes de Sousa Filho*/Col. Mons. Angelino - Inhumas.

⋆ *Paulo Lúcio Bahia Silva Júnior*/Colégio Agostiniano - Goiânia.

⋆ *Hadassa Caruirane Bonifácio de Lima*/Colégio Degraus - Goiânia.

⋆ *Letícia Cestari H. da Silva Campos*/Colégio Agostiniano -Goiânia.

⋆ *Pedro Bittencourt Arruda*/Colégio Marista - Goiânia.

⋆ *Rebeca Daher França*/Colégio Crescer - Anápolis.

⋆ *Vaniele Guimarães carvalho*/Ed. Nascente do Araguaia - Mineiros.

⋆ *Larissa Alves Carrião*/Colégio Disciplina - Goiânia.

⋆ *Luan Felipe R. Costa*/Colégio Agostiniano - Goiânia.

⋆ *Lorrany Miquelante Yoshida*/Colégio Marista - Goiânia.

⋆ *Leandro Sobocinski Castro*/Colégio Integrado Jaó-Goiânia.

⋆ *Patrícia Ferreira de Freitas*/Col. E. Divino Pai Eterno - Trindade.

⋆ *Matheus Henrique de A. Araújo*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Hugo Brandão Cardozo*/Centro Ed. Sesc Cidadania - Goiânia.

Nível 3 (Ensino Médio)

- Primeiro Lugar

  ⋆ *Pedro Henrique Guedes de Oliveira*/Colégio Prevest - Goiânia.

- Segundo Lugar

  ⋆ *Vicente de Souza Cardoso Júnior*/Colégio Visão - Goiânia.

- Terceiro Lugar

  ⋆ *Luciana M. R. Salgado*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Erick Assis Lima*/Colégio WR - Goiânia.

- Menção Honrosa

⋆ *Francisco Habib Issa Mattos*/Colégio Galileu - Anápolis.

⋆ *Leonardo Augusto de Oliveira*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Filipe Louly Quinan Junqueira*/Colégio WR - Goiânia.

⋆ *Iran Carlos M. F. Filho*/Colégio WR - Goiânia.

⋆ *Guilherme Victor Humberto Soares Carneiro*/Col. Agostiniano - Goiânia.

⋆ *Rafael Soares da Mota*/Colégio Uniclass Objetivo - Goiânia.

⋆ *Gustavo Medeiros da Silveira*/Colégio WR - Goiânia.

⋆ *Luíz Miguel Perandini Barini*/Colégio Expovest - Goiânia.

⋆ *Ricardo Nunes Martins*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Ricardo Elias Ramos*/Colégio Discplina - Goiânia.

⋆ *Amanda Guedes de Oliveira*/Colégio Prevest - Goiânia.

⋆ *Vantuir santos júnior*/Neo Instituto de Ensino - Porangatu.

⋆ *Paulo Henrique Bento Ribeiro*/Colégio Discplina - Goiânia.

⋆ *Daniel Adam Miranda*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Pedro Henrique Terra Estrela*/Colégio WR - Goiânia.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 24-27

Classificados na XV OMEG - 2006

Nível 1 (5ª e 6ª Séries do Ensino Fundamental)

- Primeiro Lugar
  - ⋆ *Mateus Mota Moraes*/Instituto Pres. de Educação - Goiânia.
- Segundo Lugar
  - ⋆ *Matheus Felter Rocha*/Escola Goiás - Anápolis.
- Terceiro Lugar
  - ⋆ *Pedro Augusto Machado Jorge* /Centro Educacional - Goiânia.
  - ⋆ *Ricardo Skrebsky Rubenich* /Escola Professora Yolanda - Goiânia.
- Menção Honrosa
  - ⋆ *Nathália Gomes Mialichi*/Colégio Disciplina - Goiânia.
  - ⋆ *Victória Franco Gonçalves*/Escola Interamérica - Goiânia.
  - ⋆ *Caio S. Carvalho*/Escola Interamérica - Goiânia.
  - ⋆ *Elias Achkar Filho*/Colégio Crescer - Anápolis.
  - ⋆ *Giovanna Silva Bianchi*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.
  - ⋆ *Guilherme Miranda Andrade*/Colégio Galileu - Anápolis.
  - ⋆ *Lucas Cardoso de Oliveira*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.
  - ⋆ *Lanna Franco Ribeiro*/Escola Interamérica - Goiânia.
  - ⋆ *Mateus Fonseca Mazzo*/Colégio Crescer - Anápolis.
  - ⋆ *Victor Falcão Pereira Costa*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Victor Queiroz Santana Bernardes*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Plínio Marques Siqueira*/Escola Interamérica - Goiânia.

⋆ *Allison Lindsay Marques da Silva*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Ernesto Leite Xavier Neto*/Colégio Diocesano - Itumbiara.

⋆ *Natália Rodrigues Parrode*/Col. Victória Figueiredo - Goiânia.

⋆ *Pedro Henrique Pereira Rocha*/Colégio Galileu - Anápolis.

⋆ *Wesley Flávio de Lima Júnior*/Colégio Delta - Anápolis.

Nível 2 (7ª e 8ª Séries do Ensino Fundamental)

- Primeiro Lugar

⋆ *Felipe Rodrigues Parrode*/Colégio Victória Figueiredo - Goiânia.

- Segundo Lugar

⋆ *Júlio Ferreira Soares Filho*/Col. Santo Agostinho - Ap. de Goiânia.

- Terceiro Lugar

⋆ *Guilherme Rezende Barros*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

- Menção Honrosa

⋆ *Sara de Oliveira Santos*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Marina Berquó Peleja*/Instituto Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Matheus de Oliveira Afonso Ogawa*/Col. U. Objetivo - Goiânia.

⋆ *André Santiago Beires*/Colégio Crescer - Anápolis.

⋆ *Luã Alves Caetano de Oliveira*/Col. Ateneu S. D. Bosco - Goiânia.

⋆ *Roberto Sobocinski Castro*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *Arthur Magalhães de Oliveira*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Cleuter Antônio Pigorelli Carneiro*/Colégio Disciplina - Goiânia.

⋆ *Fernando Henrique Coimbra Afonso*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Marco Túlio José de Oliveira*/Centro E. Sesc Cidadania - Goiânia.

⋆ *Ana Carina Peres Ferreira dos Santos*/Col. Mons. Angelino - Inhumas.

⋆ *Jeová Barbosa Ramos Filho*/Colégio E. Pe. N. Maranhão Arzola - Buriti Alegre.

⋆ *Laura de Freitas Severino*/Colégio Victória Figueiredo - Goiânia.

⋆ *Ian Castilho Caldeira Brant*/Prevest Unidade Sul - Goiânia.

⋆ *Iuri Rezende Souza*/Educandário N. do Araguaia - Mineiros.

⋆ *Yu Tzu Wu*/Colégio Delta - Anápolis.

⋆ *Matheus Fagundes de Azevedo*/Colégio Crescer- Goiânia.

⋆ *Alexandre Lemes de Freitas*/Col. Galileu Uni. Centro - Anápolis.

⋆ *Vaniele Guimarães Carvalho*/Edu. Nascentes do Araguaia - Mineiros.

⋆ *Danilo Rebouças*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Tatiane Machado Ferreira*/Colégio Exato - Iporá.

⋆ *Luisa Maranhão Silva*/Colégio Delta - Anápolis.

⋆ *Beatriz Ribeiro Kherlakian Barbosa*/Colégio Profª Yolanda - Goiânia.

⋆ *Bruno Franco Belém*/Colégio Victória Figueiredo - Goiânia.

⋆ *Carolina Guarniéri Gouveia*/Núcleo Educativo Catalão - Catalão.

⋆ *Douglas Florêncio de Sousa*/Col. Ateneu S. Dom Bosco - Goiânia.

⋆ *João Pedro Vivolo Lopes e Souza*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Joel Felippe Barbosa de Oliveira Velloso*/Esc. Grandaso - Goiânia.

⋆ *Marcela Rodrigues de Magalhães*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Marcos Celestino Carvalho Júnior*/Colégio Goyases - Goiânia.

⋆ *Jean Carlos de Aguiar*/Escola Rosa Turístico Araujo - Anicuns.

Nível 3 (Ensino Médio)

- Primeiro Lugar

  ⋆ *Guilherme Augusto Sousa Alcântara*/Centro E. Paulo F. - Anglo - Catalão.

- Segundo Lugar

  ⋆ *Vantuir Santos Júnior*/Neo Instituto de Ensino - Porangatu.

- Terceiro Lugar

  ⋆ *Letícia Goulart Netto*/Colégio Universitário - Catalão.

  ⋆ *Amanda Guedes de Oliveira*/Colégio Prevest Centro - Goiânia.

  ⋆ *Letícia Maria Silva*/Col. Estadual Jales Machado - Goianésia.

- Menção Honrosa

  ⋆ *Cássio Sobocinski Castro*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.

  ⋆ *José Carlos Carvalho Júnior*/Col. E. José L. de Almeida - Anápolis.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 28-33

Classificados na XVI OMEG - 2007

Nível 1 (6º e 7º Anos do Ensino Fundamental)

- Primeiro Lugar

⋆ *Isabela Oliveira C. de Moura*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

- Segundo Lugar

⋆ *Lucas Carvalho Daher*/Escola de E. Fund. Crescer - Anápolis.

- Terceiro Lugar

⋆ *Roberta Sudária Pinheiro*/Colégio Marista - Goiânia.

- Menção Honrosa

⋆ *Letícia Duarte Rosique*/Col. Victória Figueiredo - Goiânia.

⋆ *Natália Rodrigues Parrode*/Col. Victória Figueiredo - Goiânia.

⋆ *Caio Ludovico Paranhos*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Pedro Augusto Machado Jorge*/Centro Edu. Sesc Cidadania - Goiânia.

⋆ *Yuri Luiz Dias Martins*/Colégio Expressivo - Goiânia.

⋆ *Paula Santana Marra*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Arthur Moraes do Lago*/Col. Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *Gregory Augusto Curado Ribeiro*/Centro Edu. OMNI - Goiânia.

⋆ *Gustavo Martins da Silva Gusmão* /Colégio Laruna - Goiânia.

⋆ *João Jorge Massaralla Neto*/Col. Marista de Goiânia - Goiânia.

⋆ *Lucas Carvalhaes de Andrade*/Esc. Monsenhor Angelino - Goiânia.

⋆ *Ana Carolina M. Oliveira*/Col. Diocesano de Itumbiara - Itumbiara.

⋆ *Felipe de Oliveira Emos*/Externato São José - Goiânia.

⋆ *Luisa Rezende Barros*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Francine Carvalho Pietrobom*/Col. Victória Figueiredo - Goiânia.

⋆ *Isabella Vecchi*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

⋆ *Lucas Guilherme Mendes Negreiro*/Col. Santo Agostinho - Goiânia.

⋆ *João Victor Barbosa Paiva*/Col. Marista de Goiânia - Goiânia.

⋆ *Túlio César de Brito Nunes*/Col. Maria Júlia - Goiânia.

⋆ *Cassio Lazaro Narros Cabral*/Edu. Nascentes do Araguaia - Jataí.

⋆ *Gabrielle Macanham Guimarães*/Esc. de E. Fund. Crescer - Anápolis.

⋆ *Natielly Aleixo Inácio*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Felipe Fisher Mascarenhas*/Col. Victória Figueiredo - Goiânia.

⋆ *Nathália Laureano Prata Cardoso*/Col. Batista Goiano - Goiânia.

⋆ *Ana Carolina Lopes Caixerta*/Col. Uniclass/Objetivo - Goiânia.

⋆ *Igor Machado Peres*/Col. Batista Goiano - Goiânia.

⋆ *Luiz Augusto Neto de Bastos*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

⋆ *Marina Miyuki Komatsu*/Escola de E. Fund. Crescer - Anápolis.

⋆ *Nátaly Duarte Lopes da Costa*/Escola Grandaso - Goiânia.

⋆ *Isabela Laguardia*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

⋆ *Lucas Freire Rassi*/Inst. Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Marcos Mathias Pereira*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Stéfano Maia Silva Calaça*/Colégio Lassale -Goiânia.

Nível 2 ($8^{\underline{o}}$ e $9^{\underline{o}}$ Anos do Ensino Fundamental)

- Primeiro Lugar

  ⋆ *Natália Araújo Ferreira*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.
- Segundo Lugar

  ⋆ *Prata Iuri Rezende de Souza*/Ed. Nascentes do Araguaia - Jataí.
- Terceiro Lugar

  ⋆ *Júlio Ferreira Soares Filho*/Colégio Santo Agostinho - Goiânia.
- Menção Honrosa

⋆ *Danilo Rebouças Fernades de Lima*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Pedro Henrique Pedrosa Torres*/Colégio Marista de Goiânia - Goiânia.

⋆ *Roberto Sobocinski Castro*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *Joel Felippe Barbosa de Oliveira Veloso*/Escola Grandaso - Goiânia.

⋆ *Ygor Muniz Soares*/Expovest - Goiânia.

⋆ *Bruna Bianco Hummel*/Escola de E. Fund. Crescer - Anápolis.

⋆ *Fernando Henrique Coimbra Afonso*/Instituto Pres. de Educação - Goiânia.

⋆ *Gabriel Borges*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *André Santiago Beires*/Escola de E. Fund. Crescer - Anápolis.

⋆ *Pedro Silva Lima*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Ricardo Skrebsky Rubenich*/Escola Profª Yolanda - Goiânia.

⋆ *Paulo Henrique Pedroso de Lima*/Col. Marista de Goiânia - Goiânia.

⋆ *Marcelo Abdala Daher*/Escola de E. Fund. Crescer - Anápolis.

⋆ *Alline Carvalho De Souza*/Col. Prevest Unid. Sul - Goiânia.

⋆ *Douglas Florêncio de Sousa*/Col. Salesiano Ateneu Dom Bosco - Goiânia.

⋆ *Pedro Mauricio de Sousa*/Escola de E. Fund. Crescer - Anápolis.

⋆ *João Vitor Falchetti*/Col. Rioverdense - Objetivo - Goiânia.

⋆ *Thiago Oliveira Costa*/Col. Prevest U. Sul - Goiânia.

⋆ *Isadora Carvalho Medeiros Francescantonio*/Col. Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *Marcela Cortes Ferreira*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

⋆ *Pedro Henrique Machado Godoy*/Col. Victória Figueiredo - Goiânia.

⋆ *Franklin Roberto Dutra de Souza*/Centro Edu. SESC Cidadania - Goiânia.

⋆ *Roberto Carlos Júnior*/Col. Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *João Paulo Yoshio da Silva*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

⋆ *Sarah Gonsalves Cruz*/Col. Prevest U. Sul - Goiânia.

⋆ *Thiago Nascimento Nogueira* /Esc. Grandaso - Goiânia.

⋆ *Leticia Faria Bahia*/Col. Batista Goiano - Goiânia.

⋆ *Philippe Borges Ruiz Lopes*/Centro Ed. SESC Cidadania - Goiânia.

⋆ *Giovanna Silva Bianchi*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Rafael Camargo Freitas*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Arthur Henrique Camargo dos Santos*/Col. Integrado Jaó - Goiânia.

Nível 3 (Ensino Médio)

• Primeiro Lugar

⋆ *Rafael Elias Nascimento*/Colégio Visão - Goiânia.

• Segundo Lugar

⋆ *Pedro Arthur Ferreira Borges*/Col. Integrado Jaó - Goiânia.

• Terceiro Lugar

⋆ *Guilherme Augusto Sousa Alcantara*/Colégio Universitário - Catalão.

• Menção Honrosa

⋆ *Eduardo Rodrigues Silva Filho*/Classe S. de Ensino - Goiânia.

⋆ *Flávio Junio Rodrigues Mendes*/Colégio Monsenhor - Goiânia.

⋆ *Andre Baramili Fleury Amorim*/Colégio Ávila - Goiânia.

⋆ *Renato Hugo Reis Borges*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Igor Cardoso Amatte*/Colégio Monsenhor - Goiânia.

⋆ *João Gabriel Moura Campos*/Col. Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *Cássio Sobocinski Castro*/Col. Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *João Carlos Rocha de Borba*/Col. Prevest U. Centro - Goiânia.

⋆ *Vinícius Mota Rezende*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.

⋆ *Bruno César R. do Amaral*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

⋆ *Thiago Henrique Silva*/Col. Prevest U. Centro - Goiânia.

⋆ *Fernado Teixeira Barros*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Lorena de Sousa Brito*/Col. Planeta Educacional - Goiânia.

⋆ *André Lemes de Freitas*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

⋆ *Davi de Castro Silva*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Augusto Antônio Ribeiro Silva*/Colégio Degraus - Goiânia.

⋆ *Pedro Henrique Peixoto Dafico*/Col. São F. de Assis - Anápolis.

⋆ *Rafael Vinicius Britto Fernandes*/Esc. Emp. Educacionais - Goiânia.

⋆ *Fábio Umeno Ferreira*/Col. Santo Agostinho - Goiânia.

⋆ *Humberto Furtado*/Col. Agostiniano N. S. de Fátima - Goiânia.

⋆ *Matheus Alves Farah*/Col. Prevest U. Sul - Goiânia.

⋆ *Everton Lima Aleixo*/Col. Planeta Educacional - Goiânia.

⋆ *Ian Castilho Caldeira Brant*/Col. Prevest U. Centro - Goiânia.

⋆ *Letícia Goulart Netto*/Colégio Universitário - Catalão.

⋆ *Henrique Coral de Azeredo*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *David Issa Mattos*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

⋆ *Douglas Souza Soares*/Inst. Galileu de Ensino - Anápolis.

⋆ *Danilo Inacio de Souza Resende*/Colégio Executivo - Goiânia.

⋆ *Vítor Bueno Figueiredo de Paula*/Colégio Einstein - Goiânia.

⋆ *Felipe de Andrade Neves*/Colégio Visão - Goiânia.

⋆ *Flávio Augusto Chavier Carneiro*/Col. Prevest U. Centro - Goiânia.

⋆ *Márcio André de Godoy Uema*/Colégio Pardal - Goiânia.

Notícias

• **A IV Bienal da SBM** realizar-se-á no período de 29/09 a 03/10/2008 no Dep. de Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM. `http://www.dma.uem.br/bienalsbm`.

• A **XVII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás** será realizada em **27 de setembro de 2008** das 13:30h às 18:00h, nos campi da UFG de: Goiânia, Anápolis, Catalão, Iporá, Itumbiara, Jataí, Porangatu, Quirinópolis e Rialma.

Para participar da **XVII Olimpíada de Matemática** do Estado de Goiás a escola deve estar cadastrada.

O cadastramento e as inscrições deverão ser feitos diretamente pelo site `www.mat.ufg.br` até 31 de agosto de 2008.

Poderão participar, por escola, até:

▷ 10 estudantes no nível 1 (6º e 7º ano do Ensino Fundamental);
▷ 10 estudantes no nível 2 (8º e 9º ano do Ensino Fundamental);
▷ 10 estudantes no nível 3 (Ensino Médio).

A seleção dos estudantes para participarem da XVII OMEG ficará a critério da escola, podendo ser utilizada a prova da 1ª fase da 29ª OBM e ou da 3ª OBMEP para esta seleção.

• A **XXX Olimpíada Brasileira de Matemática -OBM** é realizada nos níveis 1, 2 e 3 em três fases:

▷ 1º fase 9/06/2008 na escola.
▷ 2º fase 13/09/2008 na escola.
▷ 3º fase 27 e 28/10/2008, no Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

Para participar da XXX OBM a escola deverá se cadastrar na Secretaria da OBM. A ficha pode ser encontrada no site `www.obm.org.br`.

• A **4ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Púbicas -OBMEP** está sendo realizada em 2008 nos níveis 1, 2 e 3 em duas fases:

▷ 1ª fase 26/08/2008, na escola.

Mais de 18 milhões de estudantes realizarão as provas da 4ª OBMEP.
▷ 2ª fase 8/11/2008.
▷ Resultado em Fevereiro de 2009.
▷ Mais informações no site `www.mat.ufg.br/obmep`.

• Datas de Outras Olimpíadas:

▷ A Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Universitário é realizada em duas fases. A primeira fase foi realizada dia 13 de setembro de 2008 e a segunda fase será nos dias 26 e 27 de outubro de 2008 no Instituto de Matemática e Estatística da UFG. Participam estudantes de vários cursos universitários [www.obm.org.br].

▷ A **Olimpíada de Maio** é uma competição realizada para jovens estudantes, disputada em dois níveis (Nível 1: para alunos até 13 anos e Nível 2: para alunos de até 15 anos), por países da América Latina, Espanha e Portugal. No Brasil a olimpíada de maio é aplicada apenas àqueles alunos premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática (medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas) e na XVII Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás. A 14ª Olimpíada de Maio foi realizada no dia 12 de maio de 2008, nos locais designados por cada coordenação regional.

• Será realizado o **XXIII Semana do IME** no Campus Samambaia/ UFG, de 6 a 10 de outubro de 2008. `www.mat.ufg.br`.

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 36-48

Soluções Comentadas das Provas da XIV OMEG - 2005

Luciana Maria de Ávila Rodrigues[2]

Resumo. Nesta seção apresentamos as soluções comentadas dos participantes da XIV OMEG.

• Nível 1

Problema 1) Considere a expressão $3^n + 7^n \in \mathbb{N}$. Note que para $n = 1$ tem-se $3^1 + 7^1 = 10$. Decida se $3^{2005} + 7^{2005}$ é ou não divisível por dez. *Justifique sua resposta.*

⋆ Solução apresentada por **André Santiago Beires** e **Mateus Miranda Andrade**:

O número 7 elevado a qualquer potência ímpar, terá como último número o 7 e o 3. Veja: $7^1 = 7$; $7^3 = 343$; $7^5 = 16807$.

O mesmo acontece com 3. Temos $3^1 = 3$; $3^3 = 27$; $3^5 = 243$.

Observe que os números 3 e 7 aparecem alternados nas potências de 3^n e 7^n com mesmo expoente ímpar. Quando fazemos a soma temos um número terminado em 0, logo divisível por 10.

Problema 2) Há um relógio cujo mostrador teve seus números embaralhados. Ache todos os números a partir das dez afirmações seguintes.

1. O número na posição F está correto.
2. A diferença entre os números nas posições G e F é 6.
3. A soma dos números A e G é treze.

[2]Agradecemos o trabalho de digitação parcial do bolsista/PROEC/2005: Élis Gardel da Costa Mesquita.

4. O número na posição L é o dobro do número A, um terço do número na posição D e metade do número na posição E.

5. Os números D e J também somam treze.

6. O número na posição D é o quádruplo de um dos números adjacentes a ele.

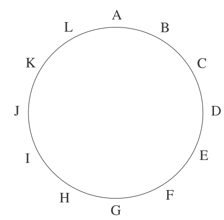
7. O número na posição D é o dobro do número na posição H.

8. A soma dos seis primeiros números (A a F) é igual à soma dos seis últimos.

9. Não há nenhum par de números consecutivos.

10. Nenhum número par está entre dois números ímpares.

Para a localização dos números siga no mostrador abaixo, onde as letras de A a L foram utilizadas para facilitar o trabalho.



Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **André Santiago Beires** e **Iuri Rezende Souza**:

Da afirmação 1) temos que $F = 5$, de 2) temos $G - 5 = 6 \Rightarrow G = 11$; de 3) $11 + A = 13 \Rightarrow A = 2$; de 4) $L = 2$, $D = 3L$ $E = 2L \Rightarrow L = 4$, $D = 12$, $E = 8$; de 5) $12 + J = 13 \Rightarrow J = 1$. Da afirmação 6) $C = 3$; da afirmação 7) $H = 6$. Da afirmação 10) segue que $I = 10$, pois restam os números 7, 9 e 10. Da afirmação 8) e do fato de que a soma dos números de um relógio é 78, segue que

$$A + B + C + D + E + F = 39 \quad \text{e} \quad G + H + I + J + K + L = 39.$$

Daí $B = 9$ e $K = 7$.

Problema 3) Seja A um conjunto finito de números racionais positivos com a seguinte propriedade:

se $\dfrac{p}{q} \in A$ então $\dfrac{q}{p} \in A$. Por exemplo, se $\dfrac{2}{3} \in A$, então também $\dfrac{3}{2} \in A$.

Mostre que se A possui uma quantidade ímpar de elementos, então necessariamente, $1 \in A$.

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada pela comissão da **XIV OMEG**.

Os elementos $\frac{p}{q} \in A$ para os quais $\frac{p}{q} \neq \frac{q}{p}$ são em número par. Se A tem um número ímpar de elementos, algum dos $\frac{p_0}{q_0} \in A$ deve satisfazer

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{q_0}{p_0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_0^2}{q_0^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_0}{q_0} = 1,$$

por serem os elementos de A positivos.

Problema 4) Escolha quaisquer quatro números pares consecutivos (por exemplo: 6, 8, 10, 12). Multiplique os dois do meio (isto é, $8 \times 10 = 80$). Multiplique o primeiro e o último (isto é, $6 \times 12 = 72$). A seguir, subtraia os resultados obtidos (isto é, $80 - 72 = 8$).

Tente repetir isto com outros números à sua escolha. Por que a resposta será sempre 8?

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Marcelo Abdala Daher**:

Chame os quatro números pares consecutivos de x, $x+2$, $x+4$, $x+6$. Daí temos:

$$(x+2)(x+4) - x(x+6) = x^2 + 6x + 8 - (x^2 - 6x) = 8.$$

Problema 5) Um triângulo é chamado de *triângulo de Heron* se sua área e os comprimentos dos lados são ambos números inteiros. Por outro lado, se os comprimentos dos lados são inteiros a, b, c satisfazendo

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

o triângulo é chamado de *pitagórico*, em homenagem a Pitágoras (570 a.C. - 490 a.C.).

Por exemplo, o triângulo de lados 3, 4 e 5 tem área 6 e, portanto, é de Heron. Ele também é pitagórico, pois, $5^2 = 3^2 + 4^2$.

a) Mostre que o triângulo T_1 cujos lados medem 9, 12 e 15 e o triângulo T_2 cujos lados medem 5, 12 e 13 são pitagóricos e também de Heron.

b) Forme um novo triângulo colando os triângulos T_1 e T_2 do item a). Este triângulo é pitagórico? é de Heron?

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Igor Muniz Soares** e **Júlio Ferreira Soares Filho**:

a) Para o triângulo T_1: $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 15^2$ e a área de T_1 é 54. Logo T_1 é pitagórico e de Heron. Para o triângulo T_2: $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$. A área de T_2 é 30. Logo é pitagórico e de Heron.

b) $15^2 = 225 \neq (5+9)^2+13^2 = 196+169 = 365$ logo não é pitagórico. Sua área é 84 logo é de Heron.

Problema 6) Pedro e João criaram um jogo de dardo cujo alvo circular tem traços círculos concêntricos de raios diferentes. O objetivo é atirar dardos e acertar dentro dos círculos. Sendo mais difícil o acerto nos menores, é atribuída pontuação diferenciada para estes acertos:
$\diamondsuit$ 5 pontos por acerto no círculo menor;
$\diamondsuit$ 3 pontos por acerto no anel intermediário (fora do círculo menor e dentro do círculo intermediário);
$\diamondsuit$] 2 pontos por acerto no anel maior (fora do círculo intermediário).

Pedro e João estipularam ainda a seguinte regra: no primeiro acerto o jogador recebe a pontuação correspondente à posição que seu dardo atingir o alvo e a partir do segundo acerto, sua pontuação será dobrada cada vez que ele acertar o anel maior; triplicada cada vez que ele acertar o anel intermediário e quintuplicada cada vez que ele acertar o círculo menor. Ao fim de uma dessas disputas, Pedro obteve 32400 e João 24000. Quem acertou mais vezes o círculo menor?

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **André Santiago Beires**:

Para descobrir quem acertou mais vezes o círculo menor basta fatorar a pontuação de cada um. Pois quando você acerta o círculo menor você quintuplica seus pontos e quantas vezes der para dividir por 5 corresponde a quantas vezes ele acertou o círculo menor. Logo, como

$32400 = 2^4 3^4 5^2$ e $2400 = 2^6 3^1 5^3$, temos que João foi quem acertou mais vezes o círculo menor.

• Nível 2

Problema 1) Há um relógio cujo mostrador teve seus números embaralhados. Ache todos os números a partir das dez afirmações seguintes.

1. O número na posição F está correto.

2 A diferença entre os números nas posições G e F é 6.

3. A soma dos números A e G é treze.

4. O número na posição L é o dobro do número A, um terço do número na posição D e metade do número na posição E.

5. Os números D e J também somam treze.

6. O número na posição D é o quádruplo de um dos números adjacentes a ele.

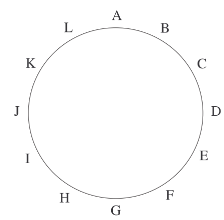
7. O número na posição D é o dobro do número na posição H.

8. A soma dos seis primeiros números (A a F) é igual à soma dos seis últimos.

9. Não há nenhum par de números consecutivos.

10. Nenhum número par está entre dois números ímpares.

Para a localização dos números siga no mostrador abaixo, onde as letras de A a L foram utilizadas para facilitar o trabalho.



⋆ Solução apresentada por **Duílio Cardoso de Sá**:

Se F está na posição certa, $F = 5$. Sendo a diferença entre F e G igual a 6, G é 11. Sendo $A + G = 13$, então $A = 2$. Se $L = 2A$, $L = 4$. Sendo $L = \frac{D}{3}$, segue que $D = 12$ e se $L = \frac{E}{2}$ segue que $E = 8$. Como $D = 2H$, segue que $H = 6$. Se $D + J = 13$, temos $J = 1$. Se $D = 4E$ ou $D = 4C$, C ou E valerá 3, como $E = 8$ temos $C = 3$. Sendo $A+B+C+D+E+F = G+H+I+J+K+L$, podemos dizer que $B + 30 = I + K + 22$. Como faltam os números 7, 9 e 10, B será igual a 9, pois $9 + 30 = 7 + 10 + 22 = 39$. Falta descobrir entre I e K qual é 7 e qual é 10. Como I está ao lado de $H = 6$, I não pode valer 7, já que não há nenhum número par entre dois números ímpares. Portanto $I = 10$ e $K = 7$.

Problema 2) Escolha quaisquer quatro números pares consecutivos (por exemplo: 6, 8, 10, 12). Multiplique os dois do meio (isto é, $8 \times 10 = 80$). Multiplique o primeiro e o último (isto é, $6 \times 12 = 72$). A seguir, subtraia os resultados obtidos (isto é, $80 - 72 = 8$).

Tente repetir isto com outros números à sua escolha. Por que a resposta será sempre 8?

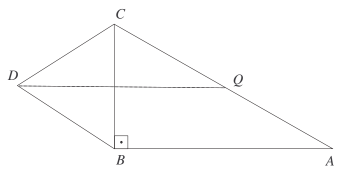
Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Alice Duarte Scarpa**:

Os quatro números pares consecutivos terão a forma $2k$, $2k + 2$, $2k + 4$, $2k + 6$. Multiplicando os dois do meio, obtemos: $(2k + 2)(2k + 4) = 4k^2 + 12k + 8$. Multiplicando o primeiro e o último segue que: $2k(2k + 6) = 4k^2 + 12k$. Subtraindo os dois termos temos:

$$4k^2 + 12k + 8 - (4k^2 + 12k) = 8.$$

Problema 3) Seja ABC um triângulo retângulo em B. Sobre o lado BC, construa o triângulo equilátero BCD, conforme a figura. Seja Q o ponto médio do lado AC. Mostre que os segmentos DQ e BA são paralelos.



Justifique sua resposta

⋆ Solução apresentada por **Pedro Victor Gomes de Oliveira**:

Se Q é o ponto médio do lado AC, ele também é o ponto médio da altura do triângulo ABC. Agora BC é altura do triângulo ABC, e o triângulo BCD é um triângulo equilátero, logo a bissetriz de D passa pelo ponto médio de BC, formando um ângulo reto. Logo a reta QD passa pelo ponto médio de BC formando um ângulo reto. Portanto temos DQ formando ângulo reto com BC e BC forma ângulo reto com AB, logo DQ é paralelo a AB.

⋆ Solução apresentada pela comissão da **XIV OMEG**:

Basta mostrar que $DQ \perp CB$. Liguemos B a Q. Se mostrarmos $BQ = CQ$ os triângulos DCQ e DBQ serão congruentes e $CM = MB$

(com $M = DQ \cap CB$); daí, portanto, $DQ \perp CB$. Ligando Q a N, o ponto médio de AB, vê-se, daí, que os triângulos QNA e CBA são semelhantes, com

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{QN}{CB} = \frac{1}{2}, \text{ logo, } BQ = CQ.$$

Problema 4) Pedro e João criaram um jogo de dardo cujo alvo circular tem traços círculos concêntricos de raios diferentes. O objetivo é atirar dardos e acertar dentro dos círculos. Sendo mais difícil o acerto nos menores, é atribuída pontuação diferenciada para estes acertos:
♢ 5 pontos por acerto no círculo menor;
♢ 3 pontos por acerto no anel intermediário (fora do círculo menor e dentro do círculo intermediário);
♢ 2 pontos por acerto no anel maior (fora do círculo intermediário).

Pedro e João estipularam ainda a seguinte regra: no primeiro acerto o jogador recebe a pontuação correspondente à posição que seu dardo atingir o alvo e a partir do segundo acerto, sua pontuação será dobrada cada vez que ele acertar o anel maior; triplicada cada vez que ele acertar o anel intermediário e quintuplicada cada vez que ele acertar o círculo menor. Ao fim de uma dessas disputas, Pedro obteve 32400 e João 24000. Quem acertou mais vezes o círculo menor?

Justifique sua resposta

⋆ Solução apresentada por **Alice Duarte Scarpa**:

Vamos decompor as pontuações de João e Pedro em fatores de 2, 3, 5. Acertou mais vezes o círculo menor aquele cuja pontuação possui o maior expoente da base 5. Como Pedro obteve $32400 = 2^4 3^4 5^2$ e João $24000 = 2^6 3^1 5^3$, quem acertou mais vezes o círculo menor foi João.

Problema 5) Considere a expressão $3^n + 7^n$, $n \in \mathbb{N}$. Note que para $n = 1$ tem-se $3^1 + 7^1 = 10$. Determine os todos os valores de $n > 1$ para os quais $3^n + 7^n$ é divisível por dez.

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Pedro Victor Aniz Gomes de Oliveira**:

Para que um número seja divisível por dez ele tem que terminar em zero. Para que a soma de dois números termine em zero a soma dos algarismos da unidade tem que ser igual a dez. Observemos os algarismos das unidades das potências de 3 e 7:

$$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9, \quad 3^3 = 27, \quad 3^4 = 81, \quad 3^5 = 243,$$
$$7^1 = 7, \quad 7^2 = 49, \quad 7^3 = 343, \quad 7^4 = 2401, \quad 7^5 = 16807.$$

Sempre que n é ímpar o algarismo é 3 ou 7, de maneira alternada. Logo sempre que n for ímpar temos o resultado desejado.

Problema 6) Atribui-se a Heron a seguinte fórmula para o cálculo da área, A, de um triângulo cujos lados medem a, b e c

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{com} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Um triângulo é chamado de *triângulo de Heron* se sua área e os comprimentos dos lados são ambos números inteiros. Por exemplo, o triângulo de lados 3, 4 e 5 tem área 6 e, portanto, é de Heron.

a) Verifique que o triângulo de lados $13, 14$ e 15 é de Heron.

b) Se os números inteiros consecutivos $b-1, b$ e $b+1$ são lados de um triângulo de Heron, mostre que b é um número par.

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada pela comissão da **XIV OMEG**:

a) Tem-se $s = \dfrac{1}{2}(13+14+15) = 21$ e, pela fórmula de Heron,

$$A = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 84.$$

b) Sejam $b-1, b, b+1$ lados de um triângulo de Heron. Então

$$s = \frac{3b}{2}, \qquad A = \sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b+2}{2}\right)\left(\frac{b-2}{2}\right)} = \frac{b}{4}\sqrt{3(b^2-4)}.$$

Note que se b for ímpar, A não será um número inteiro pois, mesmo que $b\sqrt{3(b^2-4)}$ seja inteiro, será um número ímpar.

• Nível 3

Problema 1) Determine todos os valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais

$$3 \mid (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n).$$

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Pedro Henrique Guedes de Oliveira**:

Temos que $3|(2^x + 2^{x+1})$ pois $2^x + 2^{x+1} = 2^x + 2.2^x = 3.2^x$. Assim sendo, para que 3 seja divisor de $(2^0 + 2^1 + ... + 2^n)$ é necessário que haja um número par de termos nessa soma. Logo temos que $3|(1+2+...+2^n)$ para $n = 2k + 1$, para $k \in \mathbb{N}$.

Problema 2) Considere a expressão $3^n + 7^n$, $n \in \mathbb{N}$. Note que para $n = 1$ tem-se $3^1 + 7^1 = 10$. Determine todos os valores de $n > 1$ para os quais $3^n + 7^n$ é divisível por dez.

Justifique sua resposta.

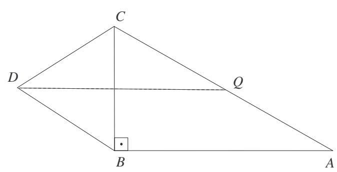
⋆ Solução apresentada por **Luciana M. R. Salgado**:

Para que um número seja divisível por 10 seu algarismo das unidades deve ser zero. Observando que

$$\begin{array}{lllll} 3^1 = 3, & 3^2 = 9, & 3^3 = 27, & 3^4 = 81, & 3^5 = 243, \\ 7^1 = 7, & 7^2 = 49, & 7^3 = 343, & 7^4 = 2401, & 7^5 = 16807. \end{array}$$

Vemos que as potências de 3 apresentam como algarismos das unidades a seqüência $(3, 9, 7, 1)$, enquanto as potências de 7 apresentam $(7, 9, 3, 1)$. Assim temos como possíveis valores para n, uma Progressão Aritmética, cujo primeiro termo é 3 e de razão 2. Daí $n = 3 + (x - 1)2$ ou ainda $n = 2x - 1$. Portanto os possíveis valores de n são aqueles que respeitam a lei de formação $n = 2x - 1$, $x \in \mathbb{N}^*$ e $n > 1$, ou seja, n ímpar.

Problema 3) Seja ABC um triângulo retângulo em B. Sobre o lado BC, construa o triângulo equilátero BCD, conforme a figura. Seja Q o ponto médio do lado AC. Mostre que os segmentos DQ e BA são paralelos.



Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Guilherme Victor Humberto Soares Carneiro**:

O triângulo ABC é retângulo, isso implica que as projeções do ponto médio da hipotenusa nos catetos serão seus respectivos pontos médios. O triângulo CBD é equilátero, o que implica que a projeção do vértice D na base CB será seu ponto médio. Logo, as projeções de D e Q no segmento CB são o mesmo ponto que chamaremos M_1. Ou seja, DQ

passará pelo ponto M_1 formando um ângulo reto com CB, já que se trata de projeções. Sendo os dois segmentos AB e DQ perpendiculares a CB e pertencentes ao mesmo plano eles são paralelos.

⋆ Solução apresentada por **Leonardo Augusto de Oliveira:**

Se ABC é um triângulo circunscrito em uma circunferência tem-se Q como circuncentro, já que é o ponto médio da hipotenusa do triângulo ABC. Portanto $CQ = QA = BQ =$ raio. Sendo BCD um triângulo equilátero, $BD = CD$. Como $BQ = CQ$, segue que DQ é a mediatriz do segmento BC. Se DQ é a mediatriz de BC, o ângulo BOQ é reto, assim como o ângulo OBA também é reto. Portanto, sendo ambos os segmentos DQ e AB perpendiculares ao mesmo segmento BC, concluímos que DQ é paralelo a AB.

Problema 4) Atribui-se a Heron a seguinte fórmula para o cálculo da área, A, de um triângulo cujos lados medem a, b e c

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad \text{com} \qquad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Um triângulo é chamado de *triângulo de Heron* se sua área e os comprimentos dos lados são ambos números inteiros. Por exemplo, o triângulo de lados 3, 4 e 5 é de Heron.

a) Se os números inteiros consecutivos $b-1, b$ e $b+1$ são lados de um triângulo de Heron, mostre que b é um número par.

b) Sejam $b-1, b$ e $b+1$ lados de um triângulo de Heron, com $b = 2x,\ x \in \mathbb{N}$. Mostre que existe $y \in \mathbb{N}$ tal que

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$

c) Generalize as conclusões dos itens a) e b), supondo agora que os lados de um triângulo de Heron formem uma PA de razão $d \neq 0$.

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Pedro Henrique Guedes de Oliveira**:

a) Temos $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, como $s = \frac{a+b+c}{2}$ segue que:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{(a+b-c)}{2}\frac{(a-b+c)}{2}\frac{(-a+b+c)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3b}{2}\frac{(b-2)}{2}\frac{b}{2}\frac{(b+2)}{2}} = \frac{\sqrt{3b.b.(b-2).(b+2)}}{4}. \end{aligned}$$

Caso b fosse ímpar, $3b$, $(b-2)$ e $(b+2)$ também seriam, de modo que $3b.b.(b-2).(b+2)$ seria um número ímpar. Como a raiz de um número ímpar é ímpar teríamos que A seria a divisão de um número ímpar por 4, não podendo assim ser um número inteiro. Assim sendo, para que o triângulo possa ser classificado como de Heron, b deve ser par.

b) Como mostrado no item a:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{3b^2(b^2-4)}}{4} = \frac{\sqrt{3(2x)^2((2x)^2-4)}}{4} = \frac{\sqrt{16.3x^2.(x^2-1)}}{4} \\ &= x\sqrt{3(x^2-1)}. \end{aligned}$$

Para que A seja um número inteiro inteiro

$$3(x^2-1) = k^2 \Longrightarrow x^2 - \frac{k^2}{3} = 1.$$

Tomando $k = 3y$ temos $\frac{k^2}{3} = 3y^2$ e assim $x^2 - 3y^2 = 1$.

c) Sendo $a = b - d$, $c = b + d$ segue que

$$A = \frac{\sqrt{3b.b.(b-2d).(b+2d)}}{4}.$$

Temos que $2r$ é par. Se b é ímpar temos que $3b, (b-2d)$ e $(b+2d)$ também serão ímpares. Desse modo, o produto destes números é um número ímpar assim como sua raiz, fazendo com que A não seja um número inteiro. Portanto, para que o triângulo seja de Heron b deve ser par. Além disso se $b = 2x$ temos $A = x\sqrt{3(x^2-d^2)}$. Para que A seja número inteiro devemos ter $3(x^2-d^2) = k^2$. Daí $x^2 - d^2 = \frac{k^2}{3}$. Tomando $k = 3y$ segue que $x^2 - 3y^2 = d^2$.

Problema 5) Sejam $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0$ e $a, b \neq 1$. Tem-se $\log_b a = r \Leftrightarrow a = b^r$. A mudança da base b para a base a é feita por intermédio da fórmula

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

a) Mostre que $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c, \quad$ para todos $\quad b, c > 0$.

b) Calcule a soma

$$\frac{1}{\log_2 2005} + \frac{1}{\log_3 2005} + \frac{1}{\log_4 2005} + \cdots + \frac{1}{\log_{2005} 2005}.$$

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Pedro Henrique Guedes de Oliveira**:

a) Como

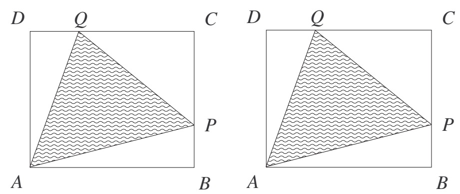
$$\log_a bc = x \Rightarrow a^x = bc, \quad \log_a b = m \Rightarrow b = a^m \text{ e } \log_a c = n \Rightarrow c = a^n.$$

Daí segue que $a^x = a^m.a^n = a^{m+n}$. Logo

$$\log_a bc = m + n = \log_a b + \log_a c.$$

b)
$$\begin{aligned} &\frac{1}{\log_2 2005} + \frac{1}{\log_3 2005} + ... + \frac{1}{\log_{2005} 2005} = \\ &= \log_{2005} 2 + \log_{2005} 3 + ... + \log_{2005} 2005, \\ &= \log_{2005}(2.3.4. \dots .2005), \\ &= \log_{2005}(2005!). \end{aligned}$$

Problema 6) Dado um retângulo $ABCD$, é possível encontrar um ponto P em BC e um ponto Q em CD de modo que o triângulo APQ seja equilátero?



Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada pela comissão da **XIV OMEG**:

Façamos $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, $DQ = x < a$ e $BP = y < b$. Então $PC = b - y$, $QC = a - x$. Os triângulos ADQ, QCP, PBA são triângulos retângulos cujas hipotenusas são AQ, PQ, AP, respectivamente. Queremos que $AQ = PQ = AP$, logo

$$a^2+y^2 = x^2+b^2 = (a-x)^2+(b-y)^2 \quad \Longrightarrow \quad 2(ax+by) = a^2+y^2 = x^2+b^2.$$

De $x = (a^2 + y^2 - 2by)/2a$ e $x^2 + b^2 = a^2 + y^2$ temos

$$y^2 - 4by + 4b^2 - 3a^2 = 0.$$

Daí, de $0 < y < b$, conclui-se $y = 2b - a\sqrt{3}$, e finalmente $x = 2a - b\sqrt{3}$. Como devem ser $a, b \in \mathbb{R}$ para que existam os pontos procurados?

Luciana Maria de Ávila Rodrigues

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
luavila@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 49-61

Soluções Comentadas das Provas da XV OMEG - 2006

Edméia Fernandes da Silva[3]

Resumo. Nesta seção apresentamos as soluções comentadas dos participantes da XV OMEG.

• Nível 1

Problema 1) Lúcio e Lucas são irmãos gêmeos e, no último natal, ganharam relógios idênticos de uma tia. Lucas, muito metódico, sempre deixa seu relógio adiantado dez minutos, o que não adianta muito, porque ele leva isso em conta e chega aos seus compromissos pontualmente na hora marcada (e não 10 minutos antes). De qualquer forma ele acha divertido confundir as pessoas que pegam uma "carona" olhando as horas em seu relógio. Lúcio, embora muito pontual, já é mais desligado, tanto que seu relógio está cinco minutos atrasado e ele ainda não notou. De manhã, na correria para se arrumarem, os dois irmãos pegaram os relógios trocados sem perceber. Eles tinham combinado de encontrarem-se com o pai ao meio-dia para almoçar. Supondo que a troca dos relógios não seja percebida, qual dos dois irmãos chegará primeiro? Quanto tempo depois chegará o outro irmão?

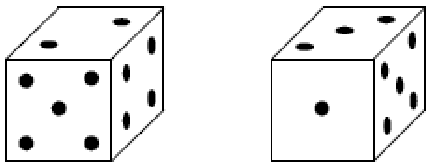
Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Mateus Mota Moraes, Matheus Felter Rocha, Pedro Augusto Machado Jorge**:

Lúcio chegará 11:50 ao almoço pensando ser 12:00. O relógio no braço de Lucas marcará 12:10 e ele acreditará estar em seu horário, mas como o relógio de Lúcio está 5 minutos atrasado, na verdade são 12:15 hs. Portanto Lúcio chegará 25 minutos antes de Lucas.

[3] Agradecemos o trabalho de digitação parcial do bolsista: Camila da Silva Rodrigues.

Problema 2) Um dado com forma de um cubo tem suas faces numeradas de 1 a 6. A figura abaixo mostra o mesmo dado em duas posições diferentes. Qual é a face oposta à face 1?

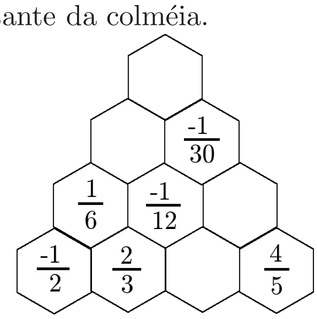


Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Lucas Cardoso de Oliveira, Nathália Gomes Mialichi e Ricardo Skrebsky Rubenich:**

Observe que o número oposto à face 1 é adjacente a face 5. Pela figura vemos que as faces adjacentes a face 5 são as faces 1,2,3 e 4, logo a face 6 é oposta à face 5. No dado 2 vemos que a face 3 e a face 5 são adjacentes a face 1. Logo a face oposta a face 1 não pode ser a 3 nem a 5. Restam então como possibilidades as face 2 e 4. A face 4 não pode ser oposta à face 1 pois nesta situação colocando os dois dados na mesma posição, por exemplo com a face 1 para frente, no primeiro dado a face superior é 2 e no segundo dado a face superior é 3, o que não pode acontecer. Logo a única possibilidade é que a face oposta à face 1 seja a face 2.

Problema 3) A colméia da figura abaixo foi preenchida de acordo com uma certa regra e depois algumas casas foram apagadas. Descubra a regra e preencha o restante da colméia.

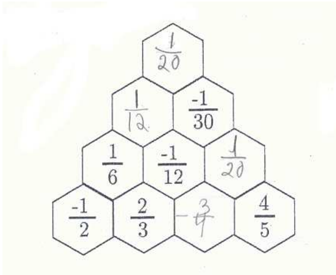


$A + B = C$

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Caio S. Carvalho, Matheus Felter Rocha:**

A regra é somar duas casas adjacentes para obter a casa de cima, como mostra a figura:



$$A + B = C.$$

Assim , por exemplo, para obter $-\frac{3}{4}$ na primeira linha, de baixo para cima, fazemos

$$\frac{-1}{12} - \frac{2}{3} = \frac{-9}{12} = \frac{-3}{4}.$$

Problema 4) Para a utilização em um certo jogo, são fabricadas cartas contendo, em um dos lados, um número e no outro lado uma cor, com a condição de que, se uma carta tem um número par, seu verso deve ter a cor verde. Suponha que o fabricante suspeite de uma falha na fabricação e peça para você examinar um conjunto de 4 cartas que estão sobre uma mesa, para se certificar de que foram numeradas de acordo com a regra. As faces que você vê ao olhar para as cartas na mesa são,

26	azul	verde	41

Quais cartas você tem que virar (e basta examinar apenas elas) para saber se a regra foi obedecida?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Giovanna Silva Bianchi, Lucas Cardoso de Oliveira e Natália Rodrigues Parrode:**

Basta virar as cartas com o número 26 e com cor azul, porque o número 26 é par e deve ter o verso verde e a cor azul tem que ter o verso ímpar. Não é preciso virar as outras cartas, pois nem toda carta com a cor verde precisa ter verso par e sim toda carta com número par precisa ter verso verde.

Problema 5) Um jogo consiste no seguinte: seu oponente pensa um número qualquer, de 1 a 8, e o seu objetivo é descobrir o número pensado, fazendo apenas perguntas cuja resposta pode ser sim ou não.

a) Qual o menor número de perguntas que lhe garante acertar todas as vezes o número pensado?

b) Se o número pensado fosse de 1 a 16, qual seria a resposta à pergunta do item a)?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Leonardo Melo de Carvalho:**

Basta perguntar se o número é par ou ímpar, reduzindo assim o número de possibilidades para a metade (4 ou 8). Depois perguntar se é maior ou menor que a metade do número dado, isto é 4 ou 8. Repita o processo até que sobre apenas dois números, depois é só escolher um dos dois e perguntar se é este o número. Assim, no primeiro caso o menor número de perguntas é 3 e no segundo caso é 4.

Problema 6) George e Juliana querem, cada qual, comprar um bombom. Para tanto, George precisa de mais 2 centavos e Juliana de mais 50 centavos. Se juntarem o dinheiro que possuem, ainda não terão o suficiente para comprar um bombom. Qual o preço deste bombom?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Elias Achkar Filho:**

Para George só faltam 2 centavos e se o dinheiro de George mais o de Juliana não é suficiente para comprar o bombom é porque ela tem menos dinheiro que George. Temos então as seguintes situações:

– Se Juliana tem no mínimo 2 centavos, o bombom custa pelo menos 52 centavos e o George tem pelo menos 50 centavos e a soma do dinheiro dos dois é suficiente para comprar o bombom, o que não é verdade.

– Se Juliana não tem dinheiro o bombom custa 50 centavos.

– Se Juliana tem 1 centavo, o bombom custa 51 centavos e George tem 49 centavos.

• Nível 2

Problema 1) João fez um suco de caju misturando uma parte de polpa de caju com duas partes de água. Como o suco ficou forte e o recipiente já estava cheio, João retirou um quarto do suco e completou o recipiente com água. Ao final, que fração representava a quantidade de polpa de caju no suco?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Cleuter Antônio Pigorelli Carneiro e Ana Carina Peres Ferreira dos Santos**:

Representamos por c: caju, a: água e r: total do suco. Temos Como João retira $\frac{1}{4}$ de suco, isto é, $\frac{1}{4}r$ temos

$$\frac{c}{3}+\frac{2a}{3}-\frac{1}{4}r=\frac{3}{4}r, \quad \text{mas} \quad r=\frac{c}{3}+\frac{2a}{3}.$$

Assim,

$$\frac{c}{3}+\frac{2a}{3}-\frac{1}{4}(\frac{c}{3}+\frac{2a}{3})=\frac{3}{4}r,$$

ou

$$(\frac{c}{3}-\frac{c}{12})-(-\frac{2a}{3}+\frac{2a}{12})=\frac{9}{12}r,$$

ou ainda

$$\frac{3c}{12}+\frac{6a}{12}=\frac{9}{12}r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c}{4}+\frac{2a}{4}=\frac{3}{4}r.$$

Completando o restante com água, isto é, com $\frac{1}{4}$ de água, temos

$$\frac{c}{4}+\frac{2a}{4}+\frac{1a}{4}=\frac{3}{4}r+\frac{1}{4}r, \quad \text{isto é,} \quad \frac{c}{4}+\frac{3a}{4}=r.$$

O suco tem $\frac{3}{4}$ de água e $\frac{1}{4}$ de suco.

Problema 2) Um jogo consiste no seguinte: seu oponente pensa um número qualquer, de 1 a 8, e o seu objetivo é descobrir o número pensado, fazendo apenas perguntas cuja resposta pode ser sim ou não.

a) Qual o menor número de perguntas que lhe garante acertar todas as vezes o número pensado?

b) Se o número pensado fosse de 1 a 32, qual seria a resposta à pergunta do item a)?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Vaniele Guimarães Carvalho e Arthur Magalhães de Oliveira**:

Vemos que se a quantidade de números é 2^n, o menor número de perguntas é exatamente n. Por exemplo, perguntando se o número escolhido é par ou ímpar, reduzimos nossa escolha a 2^{n-1} números. Depois dividimos estes 2^{n-1} números em dois conjuntos e perguntamos em qual deles o número se encontra. Repetimos este processo até que sobre apenas um conjunto com 2 números e fazemos a pergunta final. Assim, na parte a) a resposta é 3 e na parte b) a resposta é 5.

Problema 3) George e Juliana querem, cada qual, comprar um bombom. Para tanto, George precisa de mais 2 centavos e Juliana de mais 50 centavos. Se juntarem o dinheiro que possuem, ainda não terão o suficiente para comprar um bombom. Qual o preço deste bombom?

Justifique sua resposta.

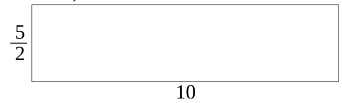
⋆ Solução apresentada por **Marcela Rodrigues de Magalhães, Yu Tzu Wu, Ana Carina Peres Ferreira dos Santos**.

Seja b o preço do bombom, x o valor que George possui e y o valor que Juliana possui. Temos:

$$x + 0,02 = b, \qquad (1)$$
$$y + 0,5 = b, \qquad (2)$$
$$x + y < b. \qquad (3)$$

Substituindo (1) em (3) temos $x+y < x+0,02$ o que nos dá $y < 0,02$, isto é Juliana tem menos que 2 centavos. Assim se Juliana tem 1 centavo o bombom custa 51 centavos e se Juliana não tem dinheiro o bombom custa 50 centavos.

Problema 4) Chame de retângulo AP um retângulo cuja área seja numericamente igual ao perímetro. Por exemplo, o retângulo de lados medindo 10 e $\frac{5}{2}$ é um retângulo AP pois sua área é $25 = 10 \times \frac{5}{2}$ e seu perímetro $25 = 2 \times \left(10 + \frac{5}{2}\right)$.



a) Se x e y são lados de um retângulo AP, como você pode obter y se você sabe o valor de x?

b) É possível obter um retângulo AP com um dos lados medindo 7? E um retângulo AP com um dos lados medindo 1?
c) Encontre todos os retângulos AP em que todos os lados são inteiros.

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Comissão da XV OMEG**:
a) Indicando por A e P a área e perímetro, respectivamente, temos $A = xy$ e $P = 2(x + y)$. Então, impor $A = P$ equivale a $xy = 2(x + y)$ ou $y(x - 2) = 2x$, logo

$$y = \frac{2x}{x-2} \quad \text{com } x \neq 2.$$

b) Para $x = 7$, temos $y = \frac{14}{5}$, logo há um retângulo AP com essas dimensões. O mesmo não ocorre para $x = 1$, pois $y = -2$.

c) Devemos ter x e y inteiros. Do item a)

$$y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}.$$

Assim, para y ser inteiro, $x - 2 \leq 4$. Logo, $x = 3, 4$ ou 6, correspondendo a $y = 6$, 4 ou 3, respectivamente. Dessa forma, os retângulos AP que possuem lados inteiros têm lados 3 e 6 ou 4 e 4 (neste caso um quadrado).

Problema 5) Para a utilização em um certo jogo, são fabricadas cartas contendo, em um dos lados, um número e no outro lado uma cor, com a condição de que, se uma carta tem um número par, seu verso deve ter a cor verde. Suponha que o fabricante suspeite de uma falha na fabricação e peça para você examinar um conjunto de 4 cartas que estão sobre uma mesa, para se certificar de que foram numeradas de acordo com a regra. As faces que você vê ao olhar para as cartas na mesa são

26	azul	verde	41

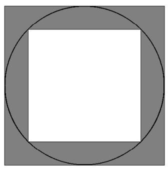
Quais cartas você tem que virar (e basta examinar apenas elas) para saber se a regra foi obedecida?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Felipe Rodrigues Parrode, Arthur Magalhães de Oliveira, Bruno Franco Belém, Vaniele Guimarães Carvalho**.

É necessário virar a carta de número 26 e a carta escrito "azul", pois a carta com o número 26 é par, logo deve ser verde no verso. A terceira carta não precisa ser virada pois em seu verso pode ter um número par ou ímpar (o número par deve ter o verso verde, mas nem toda carta verde precisa ter o verso par). A quarta carta não precisa ser virada pois não importa a cor que tem no verso.

Problema 6) Dentro um quadrado desenha-se o maior círculo possível (que naturalmente vai tocar os lados do quadrado na metade de seus comprimentos). A seguir, dentro do círculo, desenha-se o maior quadrado possível, com os lados paralelos aos do quadrado inicial, como se pode ver na figura abaixo.



Considere duas regiões: o quadrado menor e a parte do quadrado maior que fica fora do quadrado menor. Qual das duas tem a maior área?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Cleuter Antônio Pigorelli Carneiro, Júlio Ferreira Soares Filho, Guilherme Rezende Barros**.

Seja r o raio do círculo, l o lado do quadrado menor e L o lado do quadrado maior.

A diagonal do quadrado menor é igual ao diâmetro do círculo. Assim, usando o teorema de Pitágoras temos

$$2l^2 = (2r)^2.$$

Portanto a área do quadrado menor é $2r^2$.

Por outro lado, o diâmetro do círculo é igual ao lado do quadrado maior. Logo a área do quadrado maior é $L^2 = (2r)^2 = 4r^2$.

A área do quadrado maior que fica fora do quadrado menor é $L^2 - l^2 = 4r^2 - 2r^2$. Portanto as duas áreas são iguais.

• Nível 3

Problema 1) George e Juliana querem, cada qual, comprar um bombom. Para tanto, George precisa de mais 2 centavos e Juliana de mais 50 centavos. Se juntarem o dinheiro que possuem, ainda não terão o suficiente para comprar um bombom. Qual o preço deste bombom?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Amanda Guedes de Oliveira**:

Considerando G a quantidade de dinheiro (em centavos) que George possui, J a quantidade de centavos de Juliana e x o preço de cada bombom temos $x > G + J$. Como $G = x - 2$ e $J = x - 50$ segue que $x - 2 + x - 50 < x$, isto é, $x < 52$.

No entanto, como Juliana precisa de 50 centavos para comprar o bombom, concluímos que o mesmo custa, no mínimo, 50 centavos. Logo $50 \geq x$ e $x < 52$.

Portanto o bombom custa 50 ou 51 centavos, dependendo se Juliana não tem nenhum centavo ou tem 1 centavo.

Problema 2) Um jogo consiste no seguinte: seu oponente pensa um número qualquer, de 1 a 16, e o seu objetivo é descobrir o número pensado, fazendo apenas perguntas cuja resposta pode ser sim ou não.

a) Qual o menor número de perguntas que lhe garante acertar todas as vezes o número pensado?

b) Se o número pensado fosse de 1 a n, qual seria a resposta à pergunta do item a)?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **José Carlos Carvalho Júnior:**

Seja x o menor número de perguntas necessárias para descobrir um número de 1 a n. Este x é tal que $2^{x-1} < n \leq 2^x$.

Assim se $n = 16$, devemos determinar x tal que $2^{x-1} < 16 \leq 2^x$, o que implica em $x = 4$. (Para uma justificativa do fato acima, ver solução da comissão).

⋆ Solução apresentada por **Comissão da XV OMEG:**

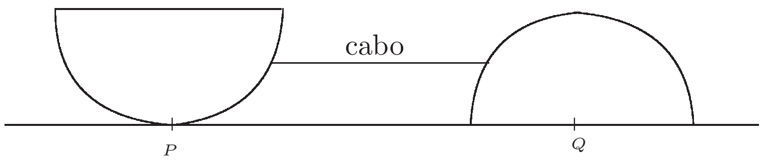
Cada pergunta (com resposta sim ou não) divide o conjunto de números que contém o número pensado em dois subconjuntos. A resposta à pergunta revela em qual dos dois subconjuntos o número pensado está. Em um dado momento do jogo se k é o número de possibilidades restantes, seja $P(k)$ o número mínimo de perguntas que lhe garante, ao final, acertar o número pensado. Para um número pequeno de possibilidades, é fácil verificar, por exemplo, que $P(2) = 1$, $P(3) = P(4) = 2$, $P(5) = P(6) = P(7) = P(8) = 3$, e não é difícil inferir que $P(k)$ coincide com o expoente da menor potência de 2 que é maior ou igual a k. Uma maneira de provar esse resultado, é verificar o seguinte, onde todos os números envolvidos são inteiros positivos:

$$(\mathbf{1})\, r > s \Rightarrow P(r) \geq P(s), \quad (\mathbf{2})\, P(2^r) = r, \quad (\mathbf{3})\, s > 2^r \Rightarrow P(s) > P(2^r).$$

A proposição **(1)**, embora possa ser demonstrada com mais rigor, é intuitivamente evidente: se você aumenta o número de possibilidades, vai precisar no mínimo do mesmo número de perguntas para chegar ao número pensado. A proposição **(2)** também é fácil de provar: se o número de possibilidades é uma potência de 2, isto é, 2^r, a estratégia que minimiza o número de possibilidades restantes a cada passo, como já vimos, é fazer perguntas que, com certeza, reduzem à metade o número de possibilidades, a cada resposta. Assim, após respondida a primeira pergunta restarão $(2^r/2) = 2^{r-1}$ possibilidades, a segunda pergunta deixa 2^{r-2} possibilidades e assim sucessivamente, até que a resposta à r-ésima pergunta deixa $2^{r-r} = 1$ possibilidades, isto é, leva ao número pensado. Para mostrar a proposição **(3)**, suponha que $s = 2^r + 1$ é o número de possibilidades restantes (que é obviamente um número ímpar). Fazendo uma pergunta que divida esse conjunto em dois subconjuntos, de maneira a minimizar o tamanho do maior deles, o maior terá $\frac{s+1}{2} = 2^{r-1}+1$ elementos. Na pior das hipóteses o número pensado estará nesse maior subconjunto e uma segunda pergunta, analogamente, pode dividi-lo em dois conjuntos menores, o maior deles com $2^{r-2} + 1$ elementos. Procedendo de modo análogo, no pior cenário, após r perguntas respondidas, restarão $2^{r-r}+1 = 2$ possibilidades, e será necessária mais uma pergunta para chegar ao número pensado. Portanto $P(2^r + 1) = r + 1 > P(2^r)$, pela proposição **(2)**. Por outro lado, se $s > 2^r + 1$, pela proposição **(1)**, tem-se $P(s) \geq P(2^r + 1) > P(2^r)$.

Finalmente, das três proposições acima, segue que se n for o número de possibilidades para o número pensado e r for o número inteiro positivo tal que $2^r < n \leq 2^{r+1}$, então $r = P(2^r) < P(n) \leq P(2^{r+1}) = r + 1$, ou seja $P(n) = r+1$ é o menor número de perguntas que lhe garante chegar ao número pensado em qualquer cenário, como queríamos mostrar.

Problema 3) Um monumento consiste de duas semi-esferas de raio r, apoiadas num mesmo plano horizontal, uma com a concavidade para cima (e conseqüentemente tangente ao plano em um ponto P) e a outra com a concavidade para baixo (que conseqüentemente apóia-se no plano numa circunferência com centro Q).

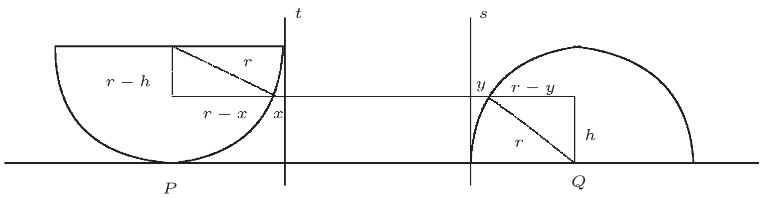


Suponha que a distância entre P e Q seja maior que $2r$. Deseja-se estender um cabo horizontal retilíneo conectando as duas superfícies e que seja o mais curto possível. Determine o comprimento desse cabo e sua altura em relação ao plano de apoio.

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Letícia Goulart Netto e Thales Rodrigues Bosco**:

Considere a figura



Seja ℓ o comprimento do cabo e $\overline{PQ}$ o comprimento do segmento PQ. Observando a figura acima vemos que $\ell = \overline{PQ} - (r-x) - (r-y)$. Note que, a medida que o cabo sobe, x diminui e y aumenta, e vice-versa. Assim, ℓ será mínimo quando $x = y$. Usando Teorema de Pitágoras obtemos as seguintes equações: $r^2 = (r-h)^2 + (r-x)^2$ e $r^2 = h^2 + (r-x)^2$, o que nos dá $h = \dfrac{r}{2}$. Substituindo $h = \dfrac{r}{2}$ em $h^2 + (r-x)^2 = r^2$ segue que $x = r(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2})$. Como $\ell = \overline{PQ} - 2r + 2x$, temos $\ell = \overline{PQ} - r\sqrt{3}$.

Problema 4) Encontre todos os retângulos de lados inteiros cuja área é igual ao perímetro.

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Amanda Guedes de Oliveira e Daniel Soares Carneiro**:

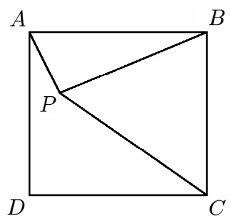
Sejam x e y os lados do retângulo, A sua área e P perímetro. Temos $A = xy$ e $P = 2x + 2y$. Então $xy = 2x + 2y$. Assim

$$xy - 2x = 2y \Leftrightarrow x(y-2) = 2y \Leftrightarrow x = \frac{2y}{y-2}.$$

Logo $y - 2 > 0$, ou seja, $y > 2$. Consideremos $x \leq y$, como $x = \frac{2y}{y-2}$ temos $\frac{2y}{y-2} \leq y$. Portanto, $2y \leq y^2 - 2y$, isto é, $y(y-4) \geq 0$ o que implica $y \geq 4$. Por outro lado, escrevendo $y = \dfrac{2x}{x-2}$ obtemos $2 < x \leq 4$.

Logo existem apenas 2 retângulos inteiros cuja área é igual ao perímetro. O quadrado de lado 4 e o retângulo de lados 3 e 6.

Problema 5) Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado e P é um ponto em seu interior.



Mostrar que as medidas $\overline{PA}, \overline{PB}$ e $\overline{PC}$ satisfazem à desigualdade $\overline{PA} + \overline{PC} \geq \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$.

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Comissão da XV OMEG**:

Comecemos fazendo a seguinte construção: gire o triângulo PBC em relação ao vértice B, de modo a identificar os pontos A e C. Isto define um novo triângulo de vértices ABP', congruente ao triângulo PBC, com $\overline{AP'} = \overline{PC}$ e $\overline{BP} = \overline{BP'}$. Note a seguir que o triângulo com vértices PBP' é um triângulo retângulo em B e também isósceles, logo $\overline{PP'} = \sqrt{2}\,\overline{BP}$. Da desigualdade triangular, aplicada ao triângulo PAP' segue $\sqrt{2}\,\overline{BP} = \overline{PP'} \leq \overline{AP} + \overline{AP'} = \overline{AP} + \overline{PC}$.

Problema 6) Mostre que para cada número primo ímpar p, há exatamente um inteiro positivo n tal que $n(n+p)$ é um quadrado perfeito.

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Comissão da XV OMEG**:

Demonstremos primeiro o seguinte resultado auxiliar: Se p, b, c são inteiros positivos, com p primo e $p^2 + b^2 = c^2$, então b e c são números consecutivos. De fato, como $p^2 + b^2 = c^2$, temos

$$p^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b).$$

Daí e da primalidade de p resultam as seguintes possibilidades: ou i) $p = c+b = c-b$ ou ii) $p^2 = c-b$ e $1 = c+b$ ou ainda iii) $p^2 = c+b$ e $1 = c-b$. Devemos descartar i) por implicar em $b = 0$; também descartamos ii) pois $b, c > 0$ implica $b+c \geq 2$. Portanto vale iii) implicando $c = b+1$.

A seguir, impondo $n(n + p) = q^2$ chega-se a

$$n = \frac{-p + \sqrt{p^2 + 4q^2}}{2}.$$

Como n é um número inteiro segue que $p^2 + (2q)^2 = s^2$ para algum inteiro $s > 0$, o qual, pelo resultado auxiliar, deve cumprir $s = 2q + 1$. Daqui obtém-se:

$$n = \left(\frac{p^2 - 1}{2}\right)^2 \quad \text{e} \quad n + p = \left(\frac{p^2 + 1}{2}\right)^2.$$

Edméia Fernandes da Silva

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
edmeia@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 62-76

Soluções Comentadas das Provas da XVI OMEG - 2007

Edméia Fernandes da Silva[4]

Resumo. Nesta seção apresentamos as soluções comentadas dos participantes da XVI OMEG.

• Nível 1

Problema 1) Meu cachorro, o Costelinha, consome exatamente 3 latas de comida de cachorro a cada 4 dias. Vou viajar por duas semanas e deixar o Costelinha com minha tia. Quantas latas de comida, no mínimo, eu deveria deixar com ela para esse período?

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Isabela L. Costa, Cassio Lázaro Barros Cabral, Paula Santana Marra**:

Se em 4 dias Costelinha consome 3 latas de comida, o seu consumo diário é de $\dfrac{3}{4} = 0,75$ latas. Viajando por duas semanas, ou 14 dias, Costelinha consumirá $14 \times \dfrac{3}{4} = 10,5$ latas de comida e portanto devo deixar com a vizinha 11 latas.

Problema 2) O índice de massa corporal (IMC) é freqüentemente usado para determinar se uma pessoa adulta está acima do peso. O IMC é calculado dividindo o peso, em kg, pelo quadrado da altura em metros, ou seja,

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso}}{(\text{altura})^2}.$$

Pelo critério da Organização Mundial da Saúde, se o IMC for maior que 25, a pessoa é considerada acima do peso.

[4] Agradecemos o trabalho de digitação parcial das bolsistas: Lays Grazielle Cardoso Silva e Wanessa Moreira dos Santos.

Marcelo tem 2m de altura e pesava 120kg quando resolveu passar um tempo em um spa. Nos 4 meses em que ficou no spa, ele conseguiu perder $\frac{1}{3}$ de seu peso original, mas depois que saiu já engordou $16kg$.

(a) Qual é o atual IMC do Marcelo?

(b) Supondo que o Marcelo perdeu a mesma quantidade de peso em cada mês que permaneceu no spa, em quanto tempo, depois de entrar, ele deixou de estar acima do peso?

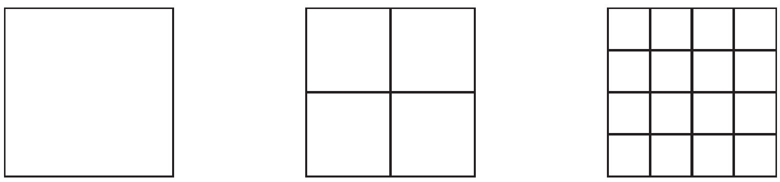
Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Isabela Oliveira Caldeira:**

a) Marcelo pesava 120kg e no spa emagreceu $\frac{1}{3}$ de seu peso, o que corresponde a 40kg, passando a pesar 80kg, mas voltou a engordar 16kg ficando com 96kg e seu IMC atual é $\frac{96}{2^2} = 24$.

b) Antes de entrar no spa o IMC de Marcelo era 30 e para não estar acima do peso o seu IMC deve ser menor ou igual a 25. Para saber qual o seu peso resolve-se a equação $\frac{x}{4} = 25$ onde x representa o peso de Marcelo, obtendo-se x=100kg. Como ele perdeu 40kg em 4 meses, ou 10kg por mês, após 2 meses ele perdeu 20kg chegando a 100kg.

Problema 3) Na seqüencia de padrões quadriculados da figura abaixo, cada padrão é formado por varetas, todas de igual comprimento. O padrão 2 utiliza seis varetas idênticas para formar 4 quadrados menores.



Padrão 1 Padrão 2 Padrão 3

(a) Seguindo este modelo, quantas varetas seriam necessárias para formar um quadriculado com 64 quadradinhos?

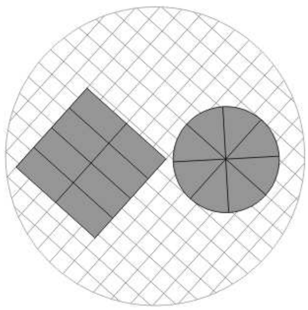
(b) E para formar um quadriculado com 900 quadradinhos?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Arthur Moraes do Lago, Yuri Luiz Dias Martins, Pedro Augusto Machado**:

Para formar um quadriculado de $n \times n = n^2$ quadradinhos são necessárias 4 varetas para formar o quadrado externo, $(n-1)$ varetas na vertical para dividir o quadrado em n partes e $(n-1)$ varetas na horizontal para dividir o quadrado em mais n partes formando assim o quadriculado desejado. Desta forma o número necessário de varetas é $4+2(n-1)$. Para 64 quadradinhos são necessárias $2(8+1) = 18$ varetas e para 900 quadradinhos $2(30+1) = 62$ varetas.

Problema 4) Numa festa haviam dois bolos de chocolate de mesma espessura (altura), um quadrado e o outro circular, colocados na mesa sobre um forro xadrez. A figura abaixo mostra a mesa vista de cima e as linhas que formam o padrão xadrez são igualmente espaçadas umas das outras. Cada bolo foi cortado em pedaços iguais, como mostram as linhas tracejadas. Marcelo, muito esperto e fanático por bolo de chocolate, assim que viu a mesa já sabia de qual dos dois bolos ia pegar um pedaço. Explique qual dos dois bolos tem os maiores pedaços.



Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Letícia Duarte Rosique, Roberta Sudário Pinheiro, João Victor Barbosa Paiva**:

O bolo quadrado ocupa totalmente 36 quadradinhos da toalha, enquanto que o bolo redondo não ocupa totalmente os 36 quadradinhos. Logo o pedaço do bolo quadrado é maior.

Problema 5) Imagine que diante de você há três caixas de papelão fechadas contendo frutas. Cada caixa tem uma etiqueta de identificação e numa delas está escrito “MAÇÃS”, em outra está escrito “LARANJAS”e na terceira “MAÇÃS E LARANJAS”. Você sabe que as etiquetas estão trocadas de forma que **nenhuma** das caixas está rotulada corretamente e seu objetivo é redistribuir as etiquetas de maneira correta. Para isso você vai poder escolher **uma** das caixas e dela será sorteada apenas **uma** fruta, que será mostrada a você. Qual das caixas você escolhe e como faz para reorganizar as etiquetas?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Letícia Milhomem Bueno, Isabela L. Costa, Thiago Yoshibatau Kuuval**:

Escolho a caixa com a etiqueta de ”MAÇÃS E LARANJAS” pois como nenhuma caixa está com a etiqueta certa nesta caixa tem apenas um tipo de fruta. Se sair uma maçã, nesta caixa deve ser colocada a etiqueta ”MAÇÃS”. A caixa com a etiqueta de ”LARANJAS”é na verdade a caixa de maçãs e laranjas e por fim a caixa com etiqueta ”MAÇÃS” contém apenas laranjas. Se sair laranja da caixa com etiqueta ”MAÇÃS E LARANJAS”, esta caixa só tem laranjas, a caixa com etiqueta ”MAÇÃS” tem laranjas e maçãs e a caixa com etiqueta ”LARANJAS” só tem maçãs.

Problema 6) Entre os 100 alunos do 6º ano de uma escola, 86 gostam de futebol e 68 gostam de vôlei.

(a) No máximo quantos alunos não gostam de vôlei nem de futebol?

(b) No mínimo quantos alunos gostam tanto de vôlei quanto de futebol?

(c) Se entre os alunos houver exatamente 6 que não gostam de vôlei nem de futebol, mas gostam de basquete e 4 que não gostam de nenhum destes três esportes, quantos alunos gostam tanto de vôlei quanto de futebol?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Isabela Oliveira Caldeira, Lucas C. Daher**:

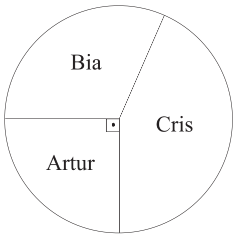
a) Se todos os 68 alunos que gostam de vôlei também gostam de futebol, temos no máximo $100 - 86 = 14$ alunos que não gostam nem de vôlei nem de futebol.

b) No máximo $(86 + 68) - 100 = 54$ alunos gostam tanto de vôlei quanto de futebol.

c)Se 10 alunos não gostam nem de vôlei nem de futebol, 90 alunos gostam de vôlei e/ou futebol. Como 86 alunos gostam de futebol, temos 4 alunos que gostam apenas de vôlei e portanto dos 68 alunos que gostam de vôlei, 64 também gostam de futebol.

• Nível 2

Problema 1) O gráfico em forma de pizza na figura abaixo representa a distribuição da mesada entre três crianças. Cris recebeu um real a mais que Bia, que recebeu dois reais a mais que Artur. Quanto cada um recebeu?

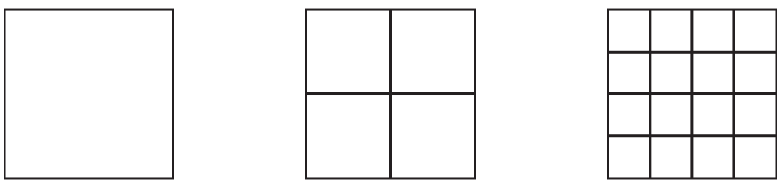


Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **João Paulo Yoshio da Silva**:

Se Artur recebeu x reais, então Bia recebeu $x+2$ reais e Cris recebeu $x+3$ reais. Observando o gráfico vemos que Artur recebeu 25% do total. Como $x + 2 + x + 3 + x$ corresponde a 100% do total e $3x$ corresponde a 75%, 5 corresponde a 25%, isto é, $x = 5$.

Problema 2) Na seqüência de padrões quadriculados da figura abaixo, cada padrão é formado por varetas, todas de igual comprimento. O padrão 2 utiliza seis varetas idênticas para formar 4 quadrados menores.



Padrão 1 Padrão 2 Padrão 3

(a) Seguindo este modelo, quantas varetas seriam necessárias para formar um quadriculado com 64 quadradinhos?

(b) E para formar um quadriculado com dez mil quadradinhos?

(c) Qual é a relação entre o número de quadradinhos e a quantidade de varetas?

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Yuri Rezende Souza**:

Para cada padrão p que forma um quadriculado com $q = p^2$ quadradinhos, precisamos de $(p+1)$ varetas no sentido horizontal e $(p+1)$ varetas no sentido vertical. Logo o número de varetas v é igual a $2(p+1)$, isto é, $v = 2(p+1) = 2(\sqrt{q}+1)$. Assim, para 64 quadradinhos $p = \sqrt{64} = 8$ e $v = 2(8+1) = 18$ varetas. Para 10000 quadradinhos $p = \sqrt{10000} = 100$ e $v = 202$.

Problema 3) Entre os 100 alunos do 8º ano de uma escola, 86 gostam de futebol e 68 gostam de vôlei.

(a) No máximo quantos alunos não gostam de nenhum dos dois esportes?

(b) Suponha que os 100 alunos estejam sentados em um auditório e recebam as seguintes instruções, nesta ordem: 1) Os que gostam de futebol, fiquem de pé; 2) Os que gostam de vôlei, também fiquem de pé; 3) Os que não gostam de futebol, sentem-se; 4) Os que não gostam de vôlei, sentem-se. Ao final qual será maior, o número de alunos sentados ou o número de alunos em pé?

(c) Se entre os alunos houver exatamente 6 que não gostam de vôlei nem de futebol, mas gostam de basquete e 4 que não gostam de nenhum destes três esportes, quantos alunos gostam tanto de vôlei quanto de futebol?

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Roberto S. Castro e Yuri Rezende Souza.** :

a) Se todos os 68 alunos que gostam de vôlei também gostam de futebol, então 100-86=14 é o máximo de alunos que não gostam de nenhum dos dois esportes.

b) Se os alunos seguirem as instruções dadas nessa ordem, ficarão em pé apenas os alunos que gostam dos dois esportes, pois os que gostam apenas de vôlei ou de futebol se sentarão nas instruções 3 e 4, e os que não gostam de nenhum esporte nem se levantarão. Com as instruções 1 e 2, no máximo 86 alunos ficarão de pé. Com as instruções 3 e 4 se sentarão $100 - 68 = 32$ alunos. Então o número máximo de alunos em pé será $100 - (100 - 86) - (100 - 68) = 54$. Como $54 > \dfrac{100}{2}$, o número de alunos em pé é maior.

c) Como 10 alunos não gostam nem de vôlei nem de futebol, 90 alunos gostam de vôlei ou de futebol. Assim o máximo de alunos que gostam de vôlei e de futebol é $86 + 68 - 90 = 64$.

Problema 4) Imagine que diante de você há três caixas de papelão fechadas contendo frutas. Cada caixa tem uma etiqueta de identificação e numa delas está escrito "MAÇÃS", em outra está escrito "LARANJAS"e na terceira "MAÇÃS E LARANJAS". Você sabe que as etiquetas estão trocadas de forma que **nenhuma** das caixas está rotulada corretamente e seu objetivo é redistribuir as etiquetas de maneira correta. Para isso você vai poder escolher **uma** das caixas e dela será sorteada apenas **uma** fruta, que será mostrada a você. Qual das caixas você escolhe e como faz para reorganizar as etiquetas?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Marcelo Abdala Daher, Ricardo Skrebsky Rubenich e Isadora Carvalho M. Francescantanio.**:

A caixa escolhida é a com a etiqueta "MAÇÃS E LARANJAS", pois ela tem apenas um tipo de fruta já que está etiquetada errada. Sejam x e y as frutas. Se da caixa escolhida retiro a fruta x, etiqueto a caixa com esta etiqueta.

A caixa com a etiqueta da fruta y certamente esta errrada e portanto contem os dois tipos de frutas recebendo a etiqueta "x e y" e por fim a caixa com a etiqueta "x e y" só contem a fruta y, recebendo então esta etiqueta.

Problema 5) Os números 3 e $\frac{3}{2}$ tem uma propriedade interessante: sua soma e seu produto são iguais, ou seja, $3 + \frac{3}{2} = 3 \times \frac{3}{2} = 9/2$.

(a) Dado um número a qualquer, para quais valores de a existe um número b que tanto somado quanto multiplicado por a dá o mesmo resultado?

(b) Esta propriedade também pode ser encontrada em somas e produtos com um número maior de parcelas. Por exemplo, é possível encontrar c tal que

$$3+\frac{3}{2}+\frac{9}{c}=3\times\frac{3}{2}\times\frac{9}{c}$$

e d tal que

$$3+\frac{3}{2}+\frac{9}{7}+\frac{81}{d}=3\times\frac{3}{2}\times\frac{9}{7}\times\frac{81}{d}\,.$$

Encontre dois números naturais e e f tais que:

$$3+\frac{3}{2}+\frac{9}{7}+\frac{81}{67}+\frac{e}{f}=3\times\frac{3}{2}\times\frac{9}{7}\times\frac{81}{67}\times\frac{e}{f}$$

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Natália Araújo Ferreira e Yuri Rezende Souza**:

a) Sejam $a+b=a\times b=x$. Assim $b=x-a$ e $a(x-a)=x$, isto é, $a^2-ax+x=0$ ou ainda $x(1-a)=-a^2$. Portanto se $a\neq 1$ temos

$$x=\frac{a^2}{a-1} \quad \text{e} \quad b=\frac{a}{a-1}.$$

b) $\frac{3}{1}+\frac{3}{2}+\frac{81}{67}+\frac{e}{f}=\frac{3}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{9}{7}\times\frac{81}{67}\times\frac{e}{f}$ ou, equivalentemente, $\frac{6561}{938}+\frac{e}{f}=\frac{6561}{938}\times\frac{e}{f}$. Pelo item a)

$$\frac{e}{f}=\frac{\frac{6561}{938}}{\frac{6561}{938}-1}=\frac{6561}{5623}.$$

Logo $e=6561=(81)^2$ e $f=5623=6561-938$.

Problema 6) De uma folha de papel quadrada, com 1m de lado, deseja-se recortar uma faixa retangular de 10cm de largura e que tenha o maior comprimento possível.

(a) Qual é esse comprimento máximo?

(b) Se a largura da faixa desejada fosse 45cm, qual seria o maior comprimento possível para a faixa?

(Obs.: Se necessário, considere que $\sqrt{2}$ vale aproximadamente $1,4142$.)

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **João Paulo Yoshio da Silva**:

a) A diagonal do quadrado é maior do que seu lado. Assim, fazendo a faixa ao longo da diagonal temos 2 triângulos retângulos isósceles um em cada ponta da faixa com a hipotenusa igual a 10cm. Deste modo o lado x deste triângulo pode ser obtido da seguinte forma: $\operatorname{sen} 45 = \dfrac{x}{10}$, onde x é um dos catetos e 10 é a hipotenusa. Portanto $x = 5\sqrt{2}$.

Temos também um triângulo retângulo isósceles cuja hipotenusa y tem comprimento da faixa e os catetos têm comprimento 100-5$\sqrt{2}$. Logo $y^2 = 2(100 - 5\sqrt{2})^2$, ou $y = \sqrt{2}(100 - 5\sqrt{2})$. Portanto $y = 131,42$cm.

Se a faixa fosse cortada paralela ao lado do quadrado esta teria 1m de comprimento e não seria a maior possível.

b) Neste caso, se a faixa for feita ao longo da diagonal obteremos dois triângulos retângulos isósceles, um em cada ponta, de hipotenusa 45cm e altura $\dfrac{45}{2}$cm = 22,5cm.

Como a diagonal do quadrado mede $100\sqrt{2}$cm = 141,42cm, ao subtrairmos da diagonal 45cm que corresponde a soma das alturas do dois triângulos da ponta, vemos que a faixa tem comprimento menor do que 1m, logo, neste caso a faixa terá maior comprimento se for cortada paralelo a um dos lados, ou seja, 1m de comprimento.

• Nível 3

Problema 1) Um copo no formato de um cilindro circular reto, com 15cm de altura e 10cm de diâmetro, contém suco pela metade de sua capacidade. No máximo quantos cubos de gelo com 2cm de aresta podem ser colocados no copo sem que o suco derrame?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Douglas Souza Soares, Leandro Sabocinski Castro e Rafael Elias Nascimento**:

Considerando que os cubos de gelo não possam ser quebrados temos que calcular quantos cubos podem ser colocados lado a lado. Como a base do copo é circular de diâmetro 10cm e cada aresta do cubo de gelo mede 2cm, podemos fazer camadas de 12 cubos de gelo. Cada camada com 12 cubos de gelo ocupa um volume de $12 \times 8 = 96cm^3$, onde $8cm^3$ é o volume de cada cubo de gelo. O volume total do copo é

$$V_c = \pi(5^2) \times 15 = 375\pi cm^3,$$

mas o copo tem suco até sua metade, ou seja, o copo tem $\frac{375\pi}{2}cm^3 = 588,8cm^3$ de suco, restando ser preenchido os outros 588,8cm^3 de volume. O número de camadas de gelo para preencher tal volume é $\dfrac{588,8}{96} = 6,13$. Mas 6 camadas preenchem $6 \times 96 = 576cm^3$ do volume restando 588,8 - 576=12,8cm^3 a serem preenchidos.

Como um cubo tem $8cm^3$, o máximo de cubos de gelo que podemos colocar no copo sem que o suco transborde e $6 \times 12 + 1 = 73$ cubos de gelo.

Problema 2) Os números 3 e $\frac{3}{2}$ tem uma propriedade interessante: sua soma e seu produto são iguais, ou seja, $3 + \frac{3}{2} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

(a) Dado um número a qualquer, será que sempre existe um número b que tanto somado quanto multiplicado por a dá o mesmo resultado?

(b) Esta propriedade também pode ser encontrada em somas e produtos com um número maior de parcelas. Por exemplo, é possível encontrar c tal que

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{9}{c} = 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{9}{c}$$

e d tal que

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{9}{7} + \frac{81}{d} = 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{9}{7} \times \frac{81}{d}.$$

Encontre dois números naturais e e f tais que:

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{9}{7} + \frac{81}{67} + \frac{e}{f} = 3 \times \frac{3}{2} \times \frac{9}{7} \times \frac{81}{67} \times \frac{e}{f}.$$

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Flávio Júnior R. Mendes**:

a) Como $a+b=ab$ temos $a=b(a-1)$, isto é, $b=\dfrac{a}{a-1}$, desde que $a\neq 1$.

b) Afirmamos que dados a,b,c,d números quaisquer existe um número x tal que $a+b+c+d+x=abcdx$. De fato,

$$a+b+c+d=abcdx-x \Leftrightarrow a+b+c+d=x(abcd-1),$$

isto é,

$$x=\frac{a+b+c+d}{abcd-1}, \text{ desde que } abcd\neq 1.$$

Sejam $a=3$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{9}{7}$ e $d=\frac{81}{67}$. Devemos encontrar $x=\frac{e}{f}$ tal que

$$3+\frac{3}{2}+\frac{9}{7}+\frac{81}{67}+\frac{e}{f}=3\times\frac{3}{2}\times\frac{9}{7}\times\frac{81}{67}\times\frac{e}{f}.$$

Pelo que vimos acima

$$\frac{e}{f}=\frac{3+\frac{3}{2}+\frac{9}{7}+\frac{81}{67}}{3\times\frac{3}{2}\times\frac{9}{7}\times\frac{81}{67}-1}=\frac{81^2}{81^2-2\times 7\times 67}=\frac{6561}{5623}.$$

Portanto, $e=6561$ e $f=5623$.

Problema 3) Entre os 100 alunos do ensino médio de uma escola, 86 gostam de futebol e 68 gostam de vôlei.

(a) No máximo quantos alunos não gostam de nenhum dos dois esportes?

(b) Suponha que os 100 alunos estejam sentados em um auditório e recebam as seguintes instruções, nesta ordem: 1) Os que gostam de futebol, fiquem de pé; 2) Os que gostam de vôlei, também fiquem de pé; 3) Os que não gostam de futebol, sentem-se; 4) Os que não gostam de vôlei, sentem-se. Ao final qual será maior, o número de alunos sentados ou o número de alunos em pé?

(c) Se entre os alunos houver exatamente 6 que não gostam de vôlei nem de futebol, mas gostam de basquete e 4 que não gostam de nenhum destes três esportes, quantos alunos gostam tanto de vôlei quanto de futebol?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Eduardo Rodrigues Silva Filho, André Lemes de Freitas, Matheus Alves Farah e Cássio Sobocinski Castro**:

a) Para ter o máximo de alunos que não gostam de nenhum dos esportes, todos os alunos que gostam de vôlei devem gostar também de futebol, e neste caso $100 - 86 = 14$ é o número procurado.

b) No final ficarão de pé apenas aqueles alunos que gostam de futebol e vôlei. Seja x o total destes alunos, isto é, número de alunos que não gostam de nem de vôlei e nem de futebol e seja y o número de alunos que não gostam de nenhum dos dois esportes. Como visto no item a) o valor de y varia entre 0 (zero) e 14. Temos que $86 - x$ é o número de alunos que gostam de futebol e $68 - x$ é o número de alunos que gostam de vôlei. Assim,

$$(86 - x) + (68 - x) + x + y = 100 \Leftrightarrow 154 - x + y = 100.$$

Portanto $x = 50 + y$. Como $0 \leq y \leq 14$, temos $54 \leq x \leq 68$, isto é, o número de alunos em pé é maior do que o número de alunos sentados.

c) Do item b) temos a equação $(86 - x) + (68 - x) + x + y = 100$. Neste caso $y = 10$ e $x = 54 + y = 54 + 10 = 64$.

Problema 4) Imagine que diante de você há três caixas de papelão fechadas contendo frutas. Cada caixa tem uma etiqueta de identificação e numa delas está escrito “MAÇÃS”, em outra está escrito “LARANJAS”e na terceira “MAÇÃS E LARANJAS”. Você sabe que as etiquetas estão trocadas de forma que **nenhuma** das caixas está rotulada corretamente e seu objetivo é redistribuir as etiquetas de maneira correta. Para isso você vai poder escolher **uma** das caixas e dela será sorteada apenas **uma** fruta, que será mostrada a você. Qual das caixas você escolhe e como faz para reorganizar as etiquetas?

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Pedro Henrique P. Dafico e Márcio André de Godoy Uema**:

Como todas as etiquetas estão trocadas, escolho a caixa com etiqueta “MAÇÃS E LARANJAS” pois não haverá possibilidade de existir duas frutas diferentes nessa caixa. Retirando uma fruta dessa caixa descubro qual a verdadeira etiqueta a ser colocada. Restam então 2 caixas, uma com etiqueta e outra sem. Como as etiquetas estão erradas, tiro a etiqueta da caixa etiquetada e passo para a que está sem etiqueta e coloco a etiqueta "MAÇÃS E LARANJAS" que está em mãos, na caixa que ficou sem etiqueta.

Problema 5) De uma folha de papel quadrada, com 1m de lado, deseja-se recortar uma faixa retangular de 10cm de largura e que tenha o maior comprimento possível.

(a) Qual é esse comprimento máximo?

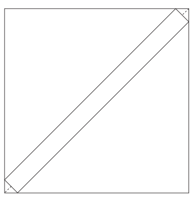
(b) Se ao invés da faixa você quisesse recortar da folha quadrada o maior semi-círculo possível (metade de um círculo), qual seria a área desse semi-círculo?

(Obs.: Se necessário, considere que $\sqrt{2}$ vale aproximadamente $1,4142$.)

Justifique sua resposta.

⋆ Solução apresentada por **Comissão da XVI OMEG**:

(a) O segmento de reta mais longo contido no quadrado é sua diagonal e, se a faixa é suficientemente estreita, é intuitivo pensar que será a mais longa possível se for recortada ao longo da diagonal como mostra a figura abaixo. Neste caso, seu comprimento será igual ao comprimento da diagonal do quadrado menos a soma das alturas dos dois triângulos menores nas extremidades. Estes serão triângulos retângulos isósceles e considerando cada um deles como metade de um quadrado, é fácil deduzir que sua altura é metade da largura da faixa retangular, ou seja, 5cm. A diagonal do quadrado mede $\sqrt{2} \approx 1,4142$m ou 141,42cm. Subtraindo os 10cm que correspondem às alturas dos dois pequenos triângulos, conclui-se que a faixa fica com 131,42cm de comprimento.



(b) As situações possíveis estão representadas nas figuras 1 e 2.

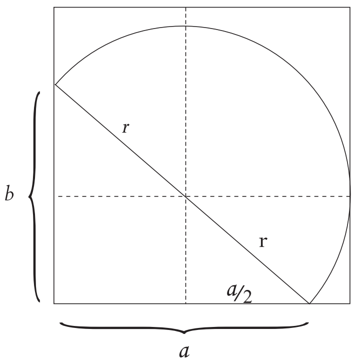


Figura 1

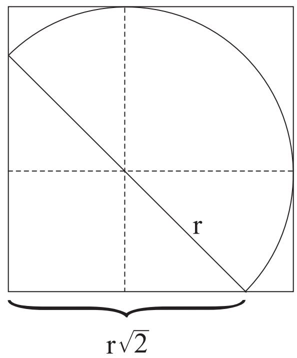


Figura 2

A figura 2 representa o semi-círculo de maior diâmetro possível. De fato, da figura 1 obtemos

$$a^2 + b^2 = (2r)^2 \quad \text{e} \quad \frac{a}{2} + r = 1 \quad \text{(a largura do quadrado)}$$

Da segunda equação tiramos, $r = 1 - \frac{a}{2}$, e então, quanto menor o valor de a maior o raio que conseguimos. Por outro lado, substituindo r na primeira equação obtemos $b^2 = 4(1-a)$, mostrando que quanto menor o valor de a, maior será b. Mas há ainda outra restrição, pois não queremos que o topo do semi-círculo ultrapasse o lado de cima do quadrado, ou seja, temos que exigir que $\frac{b}{2} + r \leq 1$ que implica $b \leq a$. Portanto, devemos ter a o menor possível e b o maior possível com $b \leq a$, o que leva a $b = a$, que é a solução apresentada na figura 2.

No caso da figura 2, o raio satisfaz

$$\frac{r\sqrt{2}}{2} + r = 1 \;\Rightarrow\; r = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586\,.$$

Assim, a área do maior semi-círculo possível é $\frac{\pi r^2}{2} = (3 - 2\sqrt{2})\pi$.

Problema 6) Numa certa turma foram distribuídos cartões em branco, um para cada aluno. Os alunos foram, então, orientados a escrever no cartão um número real qualquer, de sua escolha. Depois os cartões foram recolhidos em uma caixa e, calculando-se a soma dos valores escritos nos cartões o resultado foi 20. A soma dos três menores foi 5 e a soma dos três maiores foi 7. Quantos alunos tem a turma?

Justifique sua resposta.

$\star$ Solução apresentada por **Davi de Castro Silva**:

Se somarmos os 3 menores valores e os 3 maiores valores obtemos 12, logo faltam 8 para obter o resultado final, e o número de alunos devem ser maior que 6. Seja n o número de alunos cuja soma dos cartões é 8. Se $n \leq 3$, então três ou menos cartões teriam soma 8, o que é impossível pois a soma dos 3 maiores valores é 7. Se $n \geq 6$, então a soma de três desses cartões seria menor que 5, o que impossível. Logo $n = 4$ ou $n = 5$. Se $n = 5$, a soma de 3 desses cartões é um resultado maior ou igual a 5 e menor ou igual a 7, e a soma dos outros dois cartões esta entre 1 e 3, o que é impossível pois cada um desses n cartões tem valor maior ou igual a $\frac{5}{3}$ e menor ou igual a $\frac{7}{3}$. Portanto $n = 4$ e o número de alunos é 10.

Edméia Fernandes da Silva

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
edmeia@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 77-83

O Teorema das Quatro Cores

Ronaldo Antonio dos Santos

Resumo. Por mais que pareça ingênuo colorir mapas, foi um problema ligado à coloração que contribuiu para o desenvolvimento de uma nova área em matemática, a Teoria dos Grafos, e ainda lançou a discussão sobre a validade de demonstrações que usam o computador de forma essencial. Conhecido como “O Teorema das Quatro Cores”, sua solução resistiu, por mais de 100 anos, ao ataque de muitos matemáticos. Mostrar um pouco dessa história é o objetivo desta nota.

1. Introdução

Nossa história começa em 1852, quando Francis Guthrie, trabalhando na coloração do mapa dos condados da Inglaterra, notou que quatro cores eram suficientes para colorir o mapa, com a condição de que regiões adjacentes não fossem pintadas com a mesma cor. Isso o levou a escrever a seu irmão Friderick questionando se todo mapa poderia ser colorido utilizando apenas quatro cores. Assim nasceu o problema das quatro cores;

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa no plano com a condição de que regiões adjacentes (que tenham uma linha de fronteira) não sejam coloridas com a mesma cor.

Como Friderick não conseguiu responder a pergunta de seu irmão, levou o problema a seu professor De Morgan na University College em Londres.

De Morgan observou inicialmente que se um mapa possui quatro regiões adjacentes duas a duas, então ele necessitará de quatro cores para ser colorido(veja Fig. 1.1). Procurou então determinar um mapa em que cinco regiões fossem adjacentes duas a duas. Acabou provando que tal mapa não existe. Infelizmente isso não impede que existam mapas que necessitem de cinco cores. De fato, um mapa que não possua quatro regiões adjacentes duas a duas pode necessitar de quatro cores (veja Fig. 1.2). Assim, mesmo não tendo o mapa cinco regiões adjacentes duas a duas pode ele necessitar de cinco cores para ser colorido.

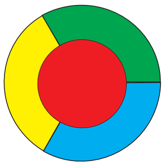


Figura 1.1:

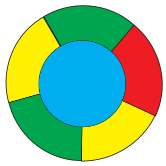


Figura 1.2:

2. A Solução de Kempe

Um pouco mais tarde, em 1878, Arthur Cayley levou esse problema à Sociedade de Matemática de Londres. Em seguida Arthur Kempe apresentou sua solução para o problema. Para acompanhar melhor o que foi feito por Kempe, representaremos um mapa por um conjunto de pontos (vértices) e arcos (arestas). Dessa forma um mapa é representado por um grafo (conjunto de vértices e arestas), em que cada região do mapa é representada por um ponto e os arcos ligando dois pontos indicam que essas regiões são adjacentes (vizinhas) (veja Fig. 1.3). Nessa representação, os grafos obtidos a partir de mapas planares são também planares, isto é, podem ser desenhados no plano, e a interseção de duas arestas, caso exista, é um vértice.

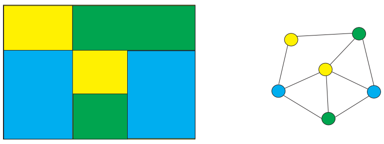


Figura 1.3:

O trabalho de Kempe passou a ser o de colorir vértices de um grafo, com a condição de que vértices ligados por uma aresta não tenham a mesma cor. Chamando de triangulação aquele grafo em que todas as regiões formadas têm três lados (veja Fig. 1.4), Kempe observou que:

1. Todo grafo pode ser estendido a uma triangulação, colocando novas arestas.

2. O número de cores necessárias para colorir o grafo estendido é suficiente para colorir o grafo original.

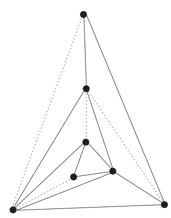


Figura 1.4:

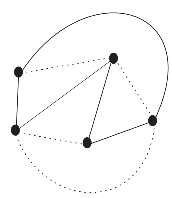


Figura 1.5:

Com essas observações, passou a preocupar-se apenas com a coloração das triangulações. Para mostrar que toda triangulação pode ser colorida com quatro cores usou o seguinte argumento indutivo. Toda triangulação com quatro ou menos vértices pode ser colorida com quatro cores. Se uma triangulação com n vértices pode ser colorida com quatro cores, ao colocarmos um novo vértice e o ligarmos aos seus três vizinhos, obteremos uma nova triangulação com $n + 1$ vértices. Esse novo grafo também pode ser colorido com apenas quatro cores, pois o vértice acrescentado estará impedido, no máximo, de usar três cores, restando uma para colori-lo. Dessa forma toda triangulação obtida a partir de outra pode ser colorida com apenas quatro cores (veja Fig. 1.6).

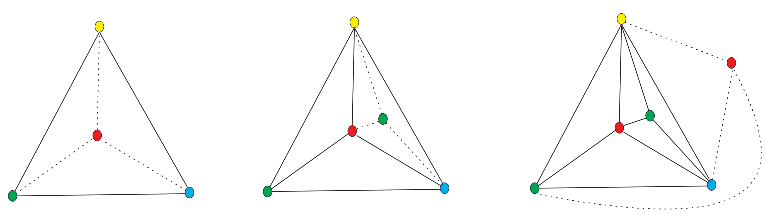


Figura 1.6:

Com esse argumento Kempe acreditou ter resolvido o problema. Infelizmente não foi o que aconteceu. Heawood, em 1890, encontrou uma falha na demonstração. Observou que o argumento usado por Kempe acarretaria na existência, em toda triangulação, de um vértice com apenas três vizinhos. Com o exemplo ilustrado na figura 1.7, mostrou que isso não é verdade. Nem toda triangulação pode ser obtida a partir de outra triangulação menor. Sem um vértice que tenha apenas três vizinhos a triangulação da figura 1.7 não pode ser reduzida a uma menor com a retirada de um de seus vértices e as arestas ligadas a ele. Portanto não foi obtido pelo método indutivo apresentado por Kempe.

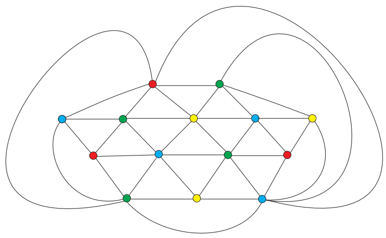


Figura 1.7:

3. O Probelma das Cinco Cores

Além de encontrar essa falha no trabalho de Kempe, Heawood provou que cinco cores são suficientes para colorir qualquer grafo. Ele denotou por V, A e F o número de vértices, arestas e faces (regiões limitadas e a região exterior) do grafo. A fórmula de Euler garante que $V - A + F = 2$ para figuras formadas por polígonos justapostos. No caso de uma triangulação, temos que cada face tem três arestas e cada aresta pertence a duas faces, isto é, $3F = 2A$. Substituindo na Fórmula de Euler temos que $A = 3V - 6$. Duas conclusões importantes decorrem dessa fórmula:

A primeira é o Teorema de De Morgan, não existe mapa com cinco regiões vizinhas duas a duas. Observe que a fórmula nos diz que um grafo com cinco vértices terá, no máximo, nove arestas, enquanto que seriam exigidas dez para que dois a dois todos os vértices fossem ligados.

A segunda é que a média de arestas por vértices é menor que seis. De fato, como cada aresta chega a dois vértices, a média de arestas por vértices é dada por $M_A = \dfrac{2A}{V}$ ou $M_A = 6 - \dfrac{12}{V}$. Se o grafo não é uma triangulação, então essa média é menor. Isso nos leva à conclusão de que todo grafo no plano possui pelo menos um vértice com cinco ou menos arestas conectadas.

Para concluir a demonstração de que cinco cores são suficientes para colorir qualquer grafo Heawood usa o seguinte argumento indutivo. No caso em que um dos n vértices do grafo possui quatro ou menos arestas, removendo esse vértice e as arestas ligadas a ele obtemos um novo grafo com $n-1$ vértices. Se esse grafo menor puder ser colorido com cinco cores, o grafo inicial também poderá, pois o vértice removido, ao ser recolocado, só terá quatro ou menos ligações, permitindo que se use uma outra cor para colori-lo.

Caso o grafo, com n vértices, tenha um vértice v com cinco arestas, dois dos vizinhos de v não serão vizinhos entre si, conforme De Morgan demonstrou. Fazendo a junção desses dois vértices a v obtemos um só vértice (veja Fig. 1.8). Isso resulta num grafo com $n-2$ vértices. Se esse puder ser colorido com cinco cores, o grafo inicial também poderá. Pois, ao separar os dois vértices de v, podemos manter para esses dois vizinhos de v a cor imposta pela coloração. Com isso, o vértice v estará impedido, no máximo, de usar quatro cores, restando uma das cinco para colorir v.

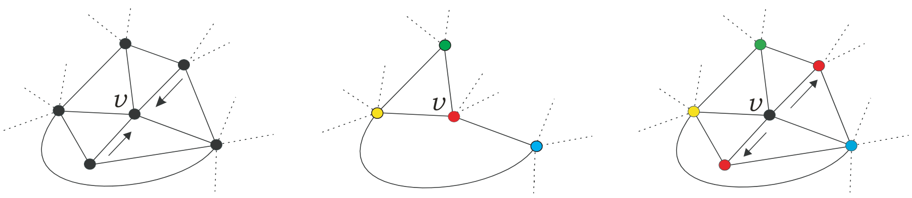


Figura 1.8:

Esses dois casos permitem reduzir qualquer grafo a um que tenha apenas cinco vértices. Portanto cinco cores são suficientes para colorir qualquer grafo.

4. O Mapa de Gardner

Muito tempo depois dos resultados obtidos por Heawood, em 1^o de Abril de 1975, Martin Gardner elaborou um mapa que, segundo ele, exigiria cinco cores para ser colorido. Mas isso não passou de uma brincadeira no dia da mentira. Deixamos a cargo do leitor a tarefa de colorir o mapa da figura 1.9 usando apenas quatro cores.

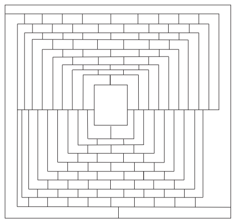


Figura 1.9:

Além de colorir o mapa acima, também deixamos para o leitor o problema de determinar, sobre o grafo, condições que garantam a coloração com três (ou duas) cores.

5. Um Desfecho Inesperado

Mesmo tendo algum avanço, o problema das quatro cores continuava aberto. Para sua demonstração, fazia-se necessário mostrar que mesmo os grafos não contemplados pelo processo desenvolvido por Kempe, como o exemplo apresentado por Heawood, poderiam ser de alguma forma reduzidos sem que isso alterasse o número de cores necessárias para sua coloração.

Em 1977, K. Appel e W. Haken publicaram a demonstração do teorema das quatro cores. Mostraram, com o uso do computador, que toda triangulação no plano contém uma configuração especial (dentre 1482 configurações especiais) que permite sua coloração com quatro cores. No entanto, a parte computacional da demonstração levou mais de 1000 horas para ser processada. Sua extensão foi alvo de várias críticas e levou à busca por uma demonstração mais simples. Em 1994, Robertson, Sanders, Seymour e Thomas reduziram para menos 700 o número de configurações especiais, mas o computador ainda foi necessário. Poucos acreditam que exista uma demonstração na qual não seja necessário o uso do computador, mas ainda não se descartou essa possibilidade.

Bibliografia

[1] Saaty, T. L. and Kainen, P. C., *The Four Color Problem; Assaults and Conquest*, Dover Publications, New York, 1986.

[2] Courant, R. e Robbins, H. *O que é Matemática?*, Editora Ciência Moderna, Trad. de Adalberto da S. Brito, 2000, RJ.

[3] Lines, M., *Pense Num Número*, Aprender fazer Ciência, Gradiva, tradução de José Luís Malaquias, 1993.

[4] Cardoso, D. M., *Sobre o Teorema das Quatro Cores*. Folha informativa da SPM, 6 (1998):11-14, Disponível em: http:www.mat.ua.pt/dcardoso/Papers.htm

[5] *The Four Color Theorem*,2005, Disponível em: http:www.mathpages.com/home/kmath266/kmath266.htm

[6] Pitombeira, J. B., *O problema das ligações de água, luz e telefone: Uma aplicação da fórmula de Euler*, Revista do Professor de Matemática, no. 11, 9-16, SBM, 1987.

[7] Carneiro, V.C., *Colorindo Mapas*, Revista do Professor de Matemática, no. 29, 31-35, SBM, SP, 1995.

[8] Carvalho, P. C. P., *Dois problemas sobre grafos*, EUREKA!, no. 01, 51-57 SBM, RJ, 1998.

[9] Lima, E. L., *Alguns problemas clássicos sobre grafos*, Revista do Professor de Matemática, no. 12, 36-42, SBM, 1988.

Autor: Ronaldo Antonio dos Santos

Endereço: UNIVERSIDADE DE FEDERAL DE GOIÁS
Campus de Rialma
Rua Benedito Luiz Dias, s/n, Setor Alvorada
74.310-000 Rialma, GO, Brasil
rasantos@mat.ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 84-88

Inteiros Gaussianos e Cálculo do Valor de π

Lenimar Nunes de Andrade

Resumo. Entre as inúmeras fórmulas que existem envolvendo a constante mais famosa da Matemática, têm se destacado algumas fórmulas que envolvem a função trigonométrica arco-tangente. Este artigo é sobre a obtenção de algumas dessas fórmulas e como utilizá-las para obter boas aproximações numéricas dessa constante π.

1. Introdução

Desde a antiguidade que o cálculo do valor de π tem despertado o interesse de diferentes povos. Aproximações como 3,12 ou 3,16 já eram conhecidas por babilônios ou egípcios há vários milênios.

Calculado na antiguidade por métodos puramente geométricos (inscrição e circunscrição de polígonos regulares em uma circunferência), a partir do século XVIII passou a ser calculado por métodos analíticos, usando-se apenas operações algébricas como adição, multiplicação e divisão de números reais. Esses métodos analíticos costumam produzir resultados com grande precisão, ou seja, com muitas casas decimais corretas. Entre os vários métodos analíticos conhecidos, destaca-se uma família de fórmulas que expressam π como uma combinação de vários arco-tangentes. Em meados do século XVIII, uma dessas fórmulas foi utilizada para calcular pela primeira vez π com 100 casas decimais corretas.

A partir do século XX, com a utilização de computadores cada vez mais potentes e rápidos, o cálculo de π passou a ser efetuado com uma quantidade cada vez mais espantosa de casas decimais. Recentemente, em dezembro de 2002, um recorde foi batido no Japão com a ajuda de supercomputadores. Nessa ocasião, foi utilizada a fórmula

$$\frac{\pi}{4} = 44 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} - 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{682} + 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{12943}$$

para calcular π com mais de **um trilhão e duzentos milhões de casas decimais!**

Este artigo relaciona dois assuntos bem diferentes: a fatoração de um certo tipo de número complexo e fórmulas que envolvem a função arco-tangente que podem ser usadas no cálculo do valor de π. As fórmulas mostradas nos exemplos fornecem boas aproximações para π usando-se apenas poucas operações aritméticas.

2. Inteiros gaussianos

Um *inteiro gaussiano* é um número complexo $a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $z = a + bi$, chamamos o produto $z\bar{z}$ de *norma de* z e denotamos por $N(z)$. Portanto, $N(a + bi) = a^2 + b^2$. Podemos ver de imediato que $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

Os inteiros gaussianos possuem algumas propriedades algébricas muito parecidas com as dos inteiros. Alguns inteiros gaussianos podem ser escritos como produto de dois outros inteiros gaussianos de normas maiores do que 1 (por exemplo, $12 + i = (2 + 5i)(1 - 2i)$), enquanto que outros não admitem tal fatoração (por exemplo, $1 - i$), comportando-se de modo semelhante aos inteiros primos.

Para fatorar $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, nos inteiros gaussianos, primeiramente calculamos $N(z)$.

- Se $N(z)$ for primo, então z não se fatora como produto de dois inteiros gaussianos de normas maiores do que 1.
- Se 2 for um divisor de $N(z)$, então $1 + i$ é um divisor de z.
- Se $p = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$, for um divisor primo de $N(z)$, então existem $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $p = a^2 + b^2$; neste caso, $a + bi$ ou $b + ai$ é divisor de z.
- Se $p = 4k + 3, k \in \mathbb{N}$, for um divisor primo de $N(z)$, então p também é um divisor de z.

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [3].

Exemplo 1. *Vamos fatorar* $z_1 = 5 + i$ *e* $z_2 = 239 - i$ *no conjunto dos inteiros gaussianos.*

Como $N(z_1) = 5^2 + 1^2 = 26 = 2 \cdot 13$*, temos que* $1 + i$ *é um fator de* z_1*. Dividindo* z_1 *por* $1 + i$ *obtemos* $3 - 2i$*. Logo,* $z_1 = (1 + i)(3 - 2i)$*.*

Temos também $N(z_2) = 239^2 + (-1)^2 = 57122 = 2 \cdot 13^4 \Rightarrow z_2$ *se fatora como produto de inteiros gaussianos de norma 2 (que é* $1 + i$*) e de norma* 13 *(que podem ser* $3 + 2i$ *ou* $2 + 3i$*). Por tentativas, obtemos seguinte fatoração para* z_2*:*

$$z_2 = -(1 + i)(3 + 2i)^4.$$

A fatoração de inteiros gaussianos pode ser bastante trabalhosa. No entanto, os programas de Computação Algébrica (como o Maple), bastante comuns hoje em dia, fazem essa fatoração na maior rapidez.

3. Fórmulas envolvendo a função arco-tangente

Todo número complexo $z = x + yi$ pode ser escrito na forma trigonométrica $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. Neste caso, ρ é a raiz quadrada positiva de $N(z)$ e θ, chamado *argumento* de z e denotado por $\arg(z)$, possui as seguintes propriedades:

- $\arg(z) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + k\pi$, $x \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Em todos os exemplos a seguir, tivemos o cuidado de usar apenas casos em que $k = 0$ nas fórmulas que envolvem cálculos de argumentos.

Exemplo 2. *Neste exemplo, vamos mostrar que*

$$\pi \;=\; 16\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Para cada parcela do tipo $n\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$*, consideramos uma potência de inteiro gaussiano da forma* $(x + iy)^n$*. Como* $-\operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \operatorname{arctg}\frac{-1}{239}$*, vamos inicialmente avaliar o produto* $(5 + i)^{16}(239 - i)^4$*.*

Fatorando $5+i$ *e* $239-i$, *temos* $5+i = (1+i)(3-2i)$, *isto é,* $239-i = -(1+i)(3+2i)^4$ *e daí:*

$$\begin{aligned}(5+i)^{16}(239-i)^4 &= (1+i)^{20}(3-2i)^{16}(3+2i)^{16}\\ &= ((1+i)^2)^{10}((3-2i)(3+2i))^{16}\\ &= (2i)^{10}(13)^{16} = -2^{10}13^{16}.\end{aligned}$$

O argumento de $z = (5+i)^{16}(239-i)^4$ *é* $16\,\text{arctg}\,\frac{1}{5} + 4\,\text{arctg}\,\frac{-1}{239}$. *Por outro lado, como* z *é um número real negativo, ele tem argumento igual a* π. *Obtemos assim a igualdade desejada.*

Essa fórmula foi utilizada no século XVIII para calcular π *com 100 casas decimais.*

Exemplo 3. *Vamos obter agora outra fórmula envolvendo* π *e a função arco-tangente. Um procedimento análogo pode ser utilizado para se obter muitas outras fórmulas semelhantes.*

Inicialmente, escolhemos dois números complexos z_1 *e* z_2 *e inteiros* $m, n \in \mathbb{N}$ *tais que* $z_1^m z_2^n$ *tenha um argumento fácil de ser calculado (como uma potência de* $1+i$ *ou de* i*, por exemplo).*

Dessa forma, escolhemos "aleatoriamente" $z_1 = (1+i)(1+2i)^5 = 79+3i$. *Para que* $1+2i$ *não compareça no produto* $z_1^m z_2^n$, *devemos escolher um* z_2 *que contenha um fator que seja potência de* $1-2i$, *por exemplo* $z_2 = (1+i)(1-2i)^{12} = 22049+1457i$.

Calculando o produto $(z_1^{12}z_2^5)^4$ *obtemos:* $z_1^{48}z_2^{20} = ((1+i)^{17}(1+2i)^{60}(1-2i)^{60})^4 = ((1+i)^4)^{17}((1+2i)(1-2i))^{240} = -4^{17}5^{240}$. *O expoente 4 que aparece nesta expressão é opcional; sem ele obteríamos o mesmo resultado.*

O argumento de $z_1^{48}z_2^{20} = (79+3i)^{48}(22049+1457i)^{20}$ *é* $48\,\text{arctg}\,\frac{3}{79} + 20\,\text{arctg}\,\frac{1457}{22049}$. *Como ele é um número real negativo devemos ter também argumento igual a* π. *Portanto, obtivemos a seguinte igualdade:*

$$\pi \;=\; 48\,\text{arctg}\,\frac{3}{79} \;+\; 20\,\text{arctg}\,\frac{1457}{22049}.$$

Exemplo 4. *Se dispuséssemos de uma calculadora com apenas as operações aritméticas básicas, seria possível verificarmos a validade de fórmulas como a do exemplo anterior? A resposta é sim. Se* $|x| < 1$, *então o arco-tangente de* x *pode ser aproximado por um polinômio formado por potências ímpares de* x, *com sinais alternados, tendo-se o cuidado de* *dividir cada potência pelo seu respectivo expoente. Em outras palavras,* $\operatorname{arctg} x$ *pode ser aproximado pelo polinômio*

$$P_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Quanto maior o n e mais próximo de 0 for x, melhor será a aproximação.

Escolhendo $P_4(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ *como aproximação do* $\operatorname{arctg} x$, *usando o exemplo anterior temos:*

$$\begin{aligned}
48 \operatorname{arctg} \frac{3}{79} + 20 \operatorname{arctg} \frac{1457}{22049} &\approx 48P_4(\frac{3}{79}) + 20P_4(\frac{1457}{22049}) \\
&\approx 48P_4(0,0379746835) + 20P_4(0,0660800943) \\
&\approx 48 \times 0,0379564451 + 20 \times 0,0659841642 \\
&\approx 3,1415926535.
\end{aligned}$$

Assim, com poucas operações aritméticas obtivemos o valor de π com 10 casas decimais exatas.

A fórmula utilizada no recorde do cálculo do valor de π em 2002 também pode ser obtida e demonstrada por um procedimento semelhante. Por fim, deixamos proposto o seguinte exercício:

Exercício 1. *Mostre que* $\dfrac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{8} + 2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{18} + 3 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{57}.$

Sugestão: $8 + i = (3 + 2i)(2 - i)$, $18 + i = (3 - 2i)(2 - i)^2 i$, $57 + i = (3 - 2i)(2 + i)^3(1 - i)$.

Bibliografia

[1] M. Beeler, R. W. Gosper, R. Schroeppel, MIT AI Memo 239, Feb. 29, 1972.

[2] V. Bongiovanni, R. Watanabe, "Pi acaba?", Revista do Professor de Matemática 19, 1991, pp. 1–7.

[3] A. Hefez, Curso de Álgebra, vol. 1 – Coleção Matemática Universitária, 1993.

Autor: Lenimar Nunes de Andrade

Endereço: UNIVERSIDADE DE FEDERAL DA PARAÍBA
Departamento de Matemática
Cidade Universitária - Campus I
58.051-900, João Pessoa, PB, Brasil
lenimar@mat.ufpb.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 90-94

Calculando Logaritmos de uma Forma Eficiente

Lenimar Nunes de Andrade

Resumo. Assim como existem fórmulas com a função trigonométrica arco-tangente que são usadas no cálculo do valor de π, existem fórmulas que envolvem a função arco-tangente hiperbólica que são úteis no cálculo de logaritmos. Neste artigo, destacamos a utilização dessas fórmulas no cálculo de logaritmos de alguns números.

1. Introdução

Desde o século XVII que os logaritmos vêm sendo utilizados. Seu cálculo despertou a atenção de matemáticos famosos como Newton, Euler, entre outros.

Os valores dos logaritmos de vários números eram publicados em forma de longas tabelas chamadas *tábuas de logaritmos*. Devido ás propriedades dos logaritmos, a utilização dessas tabelas tinha por objetivo facilitar cálculos onde apareciam multiplicações, divisões, potências e raízes.

Como as tábuas de logaritmos são construídas e a maneira como as calculadoras ou computadores os calculam é algo que sempre chama a atenção dos curiosos.

Neste artigo apresentamos algumas fórmulas que podem ser usadas para calcular logaritmos de uma forma eficiente, ou seja, com poucas operações aritméticas envolvidas e boa precisão numérica dos resultados obtidos.

2. A função Arco-tangente Hiperbólica

A função *arco-tangente hiperbólica* arctgh(x) pode ser definida por

$$\operatorname{arctgh}(x) \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

onde $\ln(x) = \log_e(x)$ representa o *logaritmo natural de x.*

Em geral, para toda fórmula envolvendo uma função trigonométrica existe uma fórmula análoga envolvendo uma função hiperbólica. Por exemplo, a partir das conhecidas fórmulas para o cálculo da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita com $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

e

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$$

podemos obter as fórmulas

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

e

$$\operatorname{arctgh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots .$$

Uma fórmula muito utilizada para calcular o valor de π é a *fórmula de Machin:*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Usando essa fórmula, ele calculou π com 100 casas decimais em 1706.

Temos várias fórmulas parecidas com a fórmula de Machin onde aparecem logaritmos no lugar de π. Como por exemplo,

$$\ln 2 = 2 \operatorname{arctgh} \frac{1}{5} + 2 \operatorname{arctgh} \frac{1}{7},$$

(que é equivalente a $\ln 2 = \ln(3/2) + \ln(4/3)$). Essa fórmula foi usada por Euler em 1748 para calcular $\ln 2$ com 25 casas decimais. É impressionante o fato de números tão distintos quanto π e $\ln 2$ serem obtidos através de cálculos tão semelhantes.

Muitas outras fórmulas podem ser obtidas a partir de valores particulares das funções $\operatorname{arctgh}(x)$ e $\ln(x)$. Por exemplo, a partir de $-1/2 \ln(3/4) + \operatorname{arctgh}(1/2)$ pode-se chegar a

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8k+8} + \frac{1}{4k+2} \right) \frac{1}{4^k},$$

que é uma série de convergência muito rápida, somando-se poucos termos podemos obter resultados bem próximos do valor exato.

3. Uma Fórmula Eficiente

Em 1997, P. Sebah obteve a fórmula

$$\ln 2 \;=\; 10 \operatorname{arctgh} \frac{1}{17} \;+\; 4 \operatorname{arctgh} \frac{13}{499}.$$

A verificação da validade desse tipo de fórmula em geral é imediata, bastando usar as definições e propriedades básicas das funções envolvidas. Por exemplo, a fórmula anterior é equivalente a

$$\ln 2 = 5 \ln \left(\frac{9}{8}\right) + 2 \ln \left(\frac{256}{243}\right) = 5(2\ln 3 - 3\ln 2) + 2(8\ln 2 - 5\ln 3).$$

Essa fórmula foi utilizada em 2001 para calcular $\ln 2$ com mais de 500 milhões de casas decimais.

Substituindo-se $\operatorname{arctgh}(1/17)$ e $\operatorname{arctgh}(13/499)$ pela soma de três termos de cada uma das respectivas séries, podemos obter um valor aproximado de $\ln 2$ com 8 casas decimais exatas (isto é, 8 casas decimais do valor aproximado coincidindo com as do valor exato), conforme mostrado a seguir. Utilizamos o símbolo "$\approx$" significando *"aproximadamente igual a"*.

$$\operatorname{arctgh} \frac{1}{17} \approx \frac{1}{17} + \frac{1}{14739} + \frac{1}{7099285} = 0,05889152,$$
$$\operatorname{arctgh} \frac{13}{499} \approx \frac{13}{499} + \frac{2197}{372754497} + \frac{371293}{154693737512495} = 0,02605800,$$
$$\ln 2 \approx 10(0,05889152) + 4(0,02605800) = 0,69314718.$$

4. Logaritmos de Outros Números

Conhecendo-se um valor como o de $\ln 2$, usando propriedades básicas dos logaritmos podemos determinar vários outros como $\ln 0,5 = \ln(1/2) = -\ln 2$, $\ln 4 = 2\ln 2$, $\ln 0,25 = \ln(1/4) = -2\ln 2$, etc.

Além disso, a partir de

$$2 \operatorname{arctgh} \left(\frac{1}{2x+1}\right) \;=\; \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{2x+1}}{1 - \frac{1}{2x+1}}\right) \;=\; \ln \left(\frac{x+1}{x}\right),$$

obtemos $\ln(x+1) \;=\; \ln(x) + 2 \operatorname{arctgh} \left(\frac{1}{2x+1}\right)$, ou seja,

$$\ln(x+1) = \ln(x) + 2 \left[\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \cdots \right],$$

que pode ser usada para calcular logaritmos de outros números, conforme mostrado a seguir onde a partir de $\ln 2$ calculamos $\ln 3$, depois $\ln 9$ e $\ln 10$.

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{375} + \frac{1}{15625} + \frac{1}{546875} + \frac{1}{17578125}\right] = 1,09861228,$$

$\ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3 = 2 \cdot 1,09861228 = 2,19722456$ e

$$\ln 10 \approx \ln 9 + 2\left[\frac{1}{19} + \frac{1}{20577} + \frac{1}{12380495} + \frac{1}{6257102173} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2904189280011}\right] = 2,30258508.$$

5. Logaritmos Decimais

Para obter logaritmos decimais, basta dividir os logaritmos naturais por $\ln 10$. Podemos obter assim os seguintes valores:

$$\log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{0,69314718}{2,30258508} = 0,30103000,$$
$$\log 3 = \frac{\ln 3}{\ln 10} = \frac{1,09861228}{2,30258508} = 0,47712125$$

que são valores com 8 casas decimais exatas.

Note que usamos apenas uma quantidade bem modesta de termos dos desenvolvimentos em séries de potências. Se tivéssemos usado mais termos, teríamos obtidos resultados muito melhores. Por exemplo, se tivéssemos usado 10 termos dos desenvolvimentos de cada série, no final teríamos obtido $\log 2$ e $\log 3$ com 15 casas decimais exatas.

6. Recordes no Cálculo de $\ln 2$

Em 2001, foi divulgado um cálculo de $\ln 2$ com mais de 500 milhões de casas decimais. A seguir, a evolução da quantidade de casas decimais desse tipo de cálculo ao longo de várias décadas.

N. dígitos	**Ano**	**Calculador**
16	1671	I. Newton
25	1748	L. Euler
137	1853	W. Shanks
273	1878	Adams
330	1940	H. S. Uhler
3.683	1962	D.W. Sweeney
2.015.926	1997	P. Demichel
5.039.926	1997	P. Demichel
10.079.926	1997	P. Demichel
29.243.200	1997	X. Gourdon
58.484.499	1997	X. Gourdon
108.000.000	1998	X. Gourdon
200.001.000	2001	X. Gourdon & S. Kondo
240.000.000	2001	X. Gourdon & P. Sebah
500.000.999	2001	X. Gourdon & S. Kondo

Bibliografia

[1] Ávila, G., *Como se constrói uma tábua de logaritmos*, Revista do Professor de Matemática 26, 1994.

[2] Gourdon, X., Sebah, P., *The logarithm constant* log(2), 2001, disponível na internet em numbers.computation.free.fr

[3] Markushevich, A. I., *Areas y logaritmos*, Editorial Mir, 1975.

Autor: Lenimar Nunes de Andrade

Endereço: UNIVERSIDADE DE FEDERAL DA PARAÍBA
Departamento de Matemática
Cidade Universitária - Campus I
58.051-900, João Pessoa, PB, Brasil
lenimar@mat.ufpb.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 95-98

Progressões - Uma Atividade de Introdução ao Conceito de Limite

Eudes Antonio da Costa

Resumo. Alguns Paradoxos têm desafiado e estimulado a razão humana ao logo dos tempos, entre eles, o Paradoxo de Zenão. Nossa tentativa será analisar (formular) este paradoxo matematicamente. Usaremos a geometria euclidiana e as progressões para introduzir o conceito, intuitivo, de limite.

Palavras-chave: Movimento, Paradoxo e Limite.

1. Sobre o Movimento

Zenão de Eléia viveu na Grécia antiga, no século V a.C. Zenão elaborou quatro aporias (argumentos), nestes pretendia mostrar que o movimento não podia ser racionalmente explicado [6]. A aporia que vamos analisar é conhecida como dicotomia e nos conduz a um paradoxo. Por paradoxo [1] entendemos aquilo que não tem solução, algo confuso, algo contrário ao nosso bom-senso, contrário aos (nossos) conhecimentos anteriores - teses, certezas. Vejamos a aporia da dicotomia (adaptado)[4]:

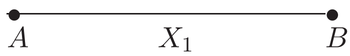
Um atirador está a certa distância de um alvo, admita que a flecha percorra sempre a metade do caminho, entre ela e o ponto a ser atingido. Pergunta: Seria possível a flecha, ao ser lançada, alcançar um alvo disposto a alguma distância do atirador?

O que Zenão pretendia, com suas aporias, não era negar o movimento aparente da flecha até o alvo, não se está em discussão o "eu vejo", pois o atirador ao lançar a flecha, com força suficiente, "eu vejo" a flecha atingir o alvo.

O que Zenão pretendia era derrubar a tese pitagórica de que a matemática (geometria) podia explicar todos os fatos e a tese de Heráclito de que o movimento era a única realidade [2].

Zenão pretende mostrar que o movimento é racionalmente absurdo, daí instala o paradoxo, pois o movimento faz parte do nosso bom-senso, do nosso sentir, do nosso ver. Mas impossível de ser explicado, racionalmente (naquela época).

2. Representação Matemática



Sejam A o lugar (ponto) em que o atirador se encontra e B o ponto em que se encontra o alvo, de coordenadas a e b [3], respectivamente. Admitindo que a flecha para percorrer de A até B tem que primeiro passar por um ponto X_1 que esta à metade da distancia entre A e B, isto é, X_1 é o ponto médio do segmento AB e possui coordenada $x_1 = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2}$. Aplicando novamente o argumento, saindo de A em direção à X_1, temos que existe um ponto X_2 que é ponto médio do segmento AX_1, sendo $x_2 = \frac{a+x_1}{2} = a - \frac{a-b}{2^2}$. Aplicando indefinidamente o argumento construímos a seqüência:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2};\\
x_2 &= \frac{a+x_1}{2} = a - \frac{a-b}{2^2};\\
x_3 &= \frac{a+x_2}{2} = a - \frac{a-b}{2^3};\\
&\dots\\
x_n &= \frac{a+x_n}{2} = a - \frac{a-b}{2^n}, \quad \text{para } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Como 2^n cresce (muito) rápido, à medida que n aumenta. (Para ver isso, compare os termos da seqüência (progressão geométrica)

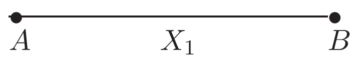
$$(2^n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots).$$

Isto é, x_n é seqüência decrescente [5]. Pois $x_n < x_{n-1}$ já que $2^n > 2^{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Ou seja, quanto maior o n tanto $\frac{a-b}{2^n}$ é próximo de zero. Assim temos que x_n "aproxima" de a.

3. Primeira Consideração

Surpreendentemente admitindo que, em um movimento entre um ponto inicial e um ponto final, primeiro (sempre) atinge-se um ponto intermediário, leva-nos a um absurdo que não podemos sair do lugar (Paradoxo). Novamente não se está em jogo o "eu vejo", mas como explicar racionalmente (matematicamente) o movimento admitindo estas premissas (pitagórica): a matemática pode explicar todos os fatos e o movimento é uma realidade.

4. Segunda Consideração (Outra Tentativa)



Admitiremos agora que a flecha saindo de A até B necessariamente passa por um ponto X_1 que esta à metade da distancia entre A e B, isto é, X_1 é o ponto médio do segmento AB. Ou seja, atingir X_1 é uma realidade, tomemos $x_1 = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2}$.

Estando agora em X_1, e desejando (ainda) atingir B, aplica-se novamente o argumento, saindo de X_1 em direção à B, temos que existe um ponto X_2 que é ponto médio do segmento X_1B sendo $x_2 = \frac{x_1+b}{2} = b + \frac{a-b}{2^2}$. Aplicando indefinidamente o argumento construímos a seqüência:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2};\\
x_2 &= \frac{x_1+b}{2} = b + \frac{a-b}{2^2};\\
x_3 &= \frac{x_2+b}{2} = b + \frac{a-b}{2^3};\\
&\dots\\
x_n &= \frac{x_n+b}{2} = b + \frac{a-b}{2^n}, \quad \text{para } n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Agora temos que temos que x_n "aproxima" de b.

5. Última Consideração

Não pretendemos neste discutir filosoficamente, nem historicamente as aporias de Zenão [2]. Apenas ilustrar uma atividade de "noção intuitiva de limite". Percebemos que conforme entendemos o "conceito" de movimento atinge-se o ponto final ou chega-se a impossibilidade do movimento.

Bibliografia

[1] ABBAGNANO, Nicola. Dicionário de Filosofia. Fundo de Cultura Econômica, México, 1963.

[2] BARKER, Stephen F. Filosofia da Matemática. Zahar Editores: Rio de Janeiro. 1969.

[3] BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclideana Plana. Coleção Professor de Matemática, SBM, 1995.

[4] BOYER, Carl B. História da Matemática. Edgard Blücher Ltda: São Paulo. 1991.

[5] LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. Editora Harbra ltda: São Paulo. 1994.

[6] Os Pré-Socráticos - Os Pensadores. 2ª ed. São Paulo: Abril Cultural, 1976.

Autor: Eudes Antonio da Costa

Endereço: UNIVERSIDADE DE FEDERAL DO TOCANTINS
Campus Universitário de Arraias
Curso de Matemática
Av. Universitária, s/n, Centro
77.330-000 Arraias, TO, Brasil
eudes@uft.edu.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 7, Setembro 2008, 99-111

Números Perfeitos e Primos de Mersenne

Alacyr J. Gomes, Eudes A. da Costa e Ronaldo A. dos Santos

Resumo. Nesta nota apresentaremos algumas propriedades e relações envolvendo números perfeitos e primos de Mersenne.

1. Introdução

Os números perfeitos fascinam os matemáticos a séculos. Acredita-se que Pitágoras esteja entre os primeiros a se deslumbrarem com tais números. Mas quais são e que mistérios cercam os *números perfeitos*? A definição, encontrada nos Elementos de Euclides, diz que; "Número perfeito é aquele que é igual a soma de suas partes", entendendo como *parte* de um número seus *divisores próprios*. Os quatro[1] primeiros números perfeitos são:

$$6 = 1 + 2 + 3;$$

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$$

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248;$$

$$8128 = 1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064.$$

Que eram os números perfeitos conhecidos até o século XVI (ver [7]). Mas por que chamar um número com tal propriedade de *perfeito*? A resposta a essa pergunta é ainda mais curiosa, acredita-se que o nome esteja ligado ao fato de os antigos escribas observarem que seis foram os dias necessários para a Criação do Mundo, com toda sua perfeição[2].

[1] Veja em www.research.att.com/~njas/sequences/A000396 uma lista com outros números perfeitos

[2] "God created the world in 6 days, a perfect number. The moon circles the earth in 28 days, again a symbol of perfection in the best of all possible worlds".(Ore, 1988: 91)

Esse tipo de observação serviu para envolver esses números em uma espécie de aura, motivando ainda mais seu estudo.

Apesar desse lado meio místico, a verificação de que um número é perfeito ou não é bastante simples, basta somar seus divisores próprios. Conforme a definição, se tal soma for igual ao próprio número ele será perfeito. Diz-se ainda que um número é *abundante* se a soma dos divisores próprios for maior que o próprio número e que é *deficiente* se for menor.

2. A Função σ e Algumas Propriedades

Euler[3] chamou de σ (sigma) a função que associa a cada natural n a soma de seus divisores, isto é, $\sigma(n)$ é a soma dos divisores positivos de n, incluindo o n. Vejamos alguns exemplos;

A soma dos divisores de 17 é 18, pois os divisores de 17 são 1 e 17. De modo geral, se p é primo a soma de seus divisores é $p+1$. Na terminologia de Euler esse fato se resume em; $\sigma(p) = p + 1$ para todo p primo.

A soma dos divisores de 27 é 40, pois os divisores de 27 são 1, 3, 9 e 27. Observe que $27 = 3^3$, seus divisores são 3^0, 3^1, 3^2 e 3^3 e que $40 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$.

De modo geral, se p é primo e $n \in \mathbb{N}$, a soma dos divisores de p^n é dada por $1 + p + p^2 + \cdots + p^n$ que sendo a soma dos termos de uma progressão geométrica é igual a $\frac{p^{n+1}-1}{p-1}$, assim temos que $\sigma(p^n) = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$, para p primo e $n \in \mathbb{N}$.

Outro exemplo bastante instrutivo é calcular a soma dos divisores de 200. Como a fatoração de 200 é $2^3.5^2$ seus divisores são da forma, $2^0.5^0$, $2^0.5^1$, $2^0.5^2$, $2^1.5^0$,$2^1.5^1$,$2^1.5^2$,...,$2^3.5^2$. Com isso temos que,

$$\begin{array}{rcl}
\sigma(200) & = & 2^0.5^0 + 2^0.5^1 + 2^0.5^2 + 2^1.5^0 + 2^1.5^1 + 2^1.5^2 + ... + 2^3.5^2 \\
& = & 2^0.(5^0 + 5^1 + 5^2) + 2^1(5^0 + 5^1 + 5^2) \\
& + & 2^2(5^0 + 5^1 + 5^2) + 2^3(5^0 + 5^1 + 5^2) \\
& = & (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)(5^0 + 5^1 + 5^2) \\
& = & 15.31 = 465.
\end{array}$$

[3]Leonard Euler (1707-1783), matemático suíço.

Com essa mesma idéia, se p e q são primos distintos e $n, m \in \mathbb{N}$, pode-se verificar que

$$\sigma(p^n \cdot q^m) = (1+p+p^2+\cdots+p^n)(1+q+q^2+\cdots+q^m) = \frac{p^{n+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{m+1}-1}{q-1}.$$

De modo mais geral, se a decomposição de um número natural x é dada por $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$, então;

$$\sigma(x) = \left(\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\right)\left(\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\right)\left(\frac{p_3^{\alpha_3+1}-1}{p_3-1}\right)\cdots\left(\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}\right).$$

Com essa função os números perfeitos são caracterizados por; n é perfeito se, e somente se, $\sigma(n) = 2n$. Já que a função σ soma também n como um dos divisores.

Afirmação 1. *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Tem-se que $\sigma(n) = 1 + n$ se, e só se, n é um número primo.*

Demonstração. Se $\sigma(n) = 1+n$, segue que $n > 1$ e que os divisores de n são 1 e n; logo, n é primo. Reciprocamente, se n é primo, os os divisores de n são 1 e n, então $\sigma(n) = 1 + n$. □

Afirmação 2. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$ com $mdc(m, n) = 1$ então $\sigma(m \cdot n) = \sigma(m) \cdot \sigma(n)$.*

Demonstração. Temos que $mdc(m, n) = 1$, assim m e n não possuem divisores comuns além do 1. Considere $D_m = \{1 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k = m\}$ e $D_n = \{1 = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_s = n\}$ o conjunto de divisores de m e n respectivamente, com $x_i \neq y_j$ para todo $i, j \geq 1$. Assim, um número será divisor de $m.n$ se, e somente se, for da forma $x_i y_j$ para algum $x_i \in D_m$ e $y_j \in D_n$, assim

$$\begin{aligned} \sigma(mn) &= \sum_{d|mn} d = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{s} x_i y_j = \sum_{i=0}^{k} x_i\Big(\sum_{j=0}^{s} y_j\Big) \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{s} y_j\Big)\Big(\sum_{i=0}^{k} x_i\Big) = \sigma(m)\sigma(n). \end{aligned}$$

□

3. Fatorações que não Geram Números Perfeitos

Afirmação 3. *Um quadrado perfeito não é um número perfeito.*

Demonstração. Seja s^2 nosso quadrado perfeito. Suponha que s se decomponha da forma $s = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. A soma dos divisores de s^2 será dada por,

$$\sigma(s^2) = (1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{2\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{2\alpha_2})\cdots(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{2\alpha_k}).$$

Como cada um dos fatores acima é números ímpar, temos que $\sigma(s^2)$ é ímpar. Portando $\sigma(s^2) \neq 2s^2$. $\square$

Afirmação 4. *Não existe números perfeitos cuja decomposição é da forma $p^m \cdot q^n$ com $2 < p < q$, sendo p, q primos.*

Demonstração. Para que o número acima seja perfeito devemos ter que,

$$\begin{aligned} \sigma(p^m \cdot q^n) &= 2p^m \cdot q^n \\ \frac{p^{m+1}-1}{p-1} \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} &= 2p^m \cdot q^n \\ pqp^m q^n - p^{m+1} - q^{n+1} + 1 &= 2(p-1)(q-1)p^n q^m \\ -p^{m+1} - q^{n+1} + 1 &= (2(p-1)(q-1) - pq)p^m q^n. \end{aligned}$$

Para que a identidade se verifique devemos ter, $pq - 2p - 2q + 2 < 0$. O que não ocorre, pois,

$$\begin{aligned} pq - 2p - 2q + 2 &= p(q-2) - 2(q-1) \\ &> p(q-2) - 2((q-1)-1) = (p-2)(q-2) > 0. \end{aligned}$$

$\square$

Afirmação 5. *Não existe números perfeitos cuja decomposição é da forma $p^m q^n r^s$ com $5 \leq p < q < r$.*

Demonstração. Seguindo o mesmo caminho do caso anterior. Supomos que $p^m q^n r^s$ seja um número perfeito, isto é,

$$\sigma(p^m q^n r^s) = 2p^m q^n r^s.$$

Isso implica em

$$2(p-1)(q-1)(r-1) - pqr < 0$$

ou

$$\frac{(p-1)}{p}\frac{(q-1)}{q}\frac{(r-1)}{r} < \frac{1}{2}.$$

Mas a desigualdade acima nunca ocorre, pois,

$$\frac{(p-1)}{p}\frac{(q-1)}{q}\frac{(r-1)}{r} > \left(\frac{p-1}{p}\right)^3 \geq \left(\frac{5-1}{5}\right)^3 > \frac{1}{2}.$$

□

Generalizando a idéia acima, temos o seguinte resultado.

Afirmação 6. *Não existe número perfeito cuja decomposição seja* $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, *com* $\dfrac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{2}-1} \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k$.

Demonstração. Para que o número acima seja perfeito devemos ter,

$$\sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$$

ou seja

$$(p_1^{\alpha_1+1}-1)(p_2^{\alpha_2+1}-1)\ldots(p_k^{\alpha_k+1}-1) = 2(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_k-1)p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}.$$

Subtraindo em ambos os membros acima o número $p_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\ldots p_k^{\alpha_k+1}$, temos que o primeiro membro é um número negativo, conseqüentemente

$$2(p_1-1)(p_2-1)\ldots(p_k-1) - p_1p_2\ldots p_k < 0$$

ou seja

$$\frac{p_1-1}{p_1}\cdot\frac{p_2-1}{p_2}\cdots\frac{p_k-1}{p_k} < \frac{1}{2}.$$

Mas isso não ocorre, já que,

$$\frac{p_1-1}{p_1}\cdot\frac{p_2-1}{p_2}\cdots\frac{p_k-1}{p_k} > \left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^k \geq \left(\frac{\frac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{2}-1}-1}{\frac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{2}-1}}\right)^k = \frac{1}{2}.$$

□

4. Números Perfeitos e Primos de Mersenne

Além da definição de números perfeitos os Elementos de Euclides (proposição 36 do livro IX) também continham a demonstração de que se o número $2^n - 1$ é primo[4], então $2^{n-1}(2^n - 1)$ é perfeito; não determinou outros números perfeitos além dos quatro primeiros por causa da dificuldade de obter novos números primos da forma $2^n - 1$. Na época o único processo conhecido para verificar que um dado número inteiro $a > 1$ é primo, era o processo das divisões de a por todos os números primos p tais que $2 \leq p \leq \sqrt{a}$, chamado crivo de Eratóstenes. Até hoje não foi encontrado qualquer número perfeito fora do "modelo" dado por Euclides há mais de 2.300 anos.[5]

Exercício 1. *Mostre que se $2^n - 1$ é primo, então n é primo.*

Exercício 2. *Dê um exemplo para mostrar que a recíproca, do exercício anterior, não é verdadeira.*

O resultado abaixo, parte devida de Euclides e parte devida a Euler, caracterizará os números perfeitos pares, relacionando-os com os primos de Mersenne.

Afirmação 7. *(Euclides - Euler) Um número natural n é um número perfeito par se, e só se, $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ sendo $2^p - 1$ um primo.*

Demonstração. Suponha que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, sendo $2^p - 1$ primo, logo $p > 1$, e conseqüentemente, n é par. Como $2^p - 1$ é ímpar, temos que $mdc(2^{p-1}, 2^p - 1) = 1$; assim

$$\sigma(n) = \sigma(2^{p-1}(2^p - 1)) = \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1) = \frac{2^p - 1}{2 - 1}2^p = 2n.$$

Portanto, n é perfeito.

Reciprocamente, suponha que n é perfeito e par. Seja 2^{p-1} a maior potência de 2 que divide n. Logo, $p > 1$ e $n = 2^{p-1}q$ com q ímpar. Então $\sigma(n) = (2^p - 1)\sigma(q)$. Como $\sigma(n) = 2n$ segue que $(2^p - 1)\sigma(q) = 2^p q$. Daí

[4] Primos da forma $2^n - 1$ são chamados primos de Mersenne (Marin Mersenne (1588-1648), matemático francês).

[5] No século XVIII Euler provou que todos os números perfeitos pares têm aquela forma. Em 2004 Davis (matemático australiano), propôs uma prova de que não existem números perfeitos ímpares[3].

temos que $(2^p - 1)|q$ pois $mdc(2^p, 2^p - 1) = 1$. Logo existe $c \in N$ com $c < q$ tal que $q = c(2^p - 1)$; portanto $(2^p - 1)\sigma(q) = 2^p q = 2^p(2^p - 1)c$, logo $\sigma(q) = 2^p c$.

Temos que q e c são dois divisores distintos de q tais que $c + q = 2^p c$. Nessa situação, $c = 1$. De fato, suponha, que $c \neq 1$. Temos, então, que $\sigma(q) \geq 1 + c + q > c + q = 2^p c$; disto segue que $2^p c = c + q < \sigma(q) = 2^p c$, uma contradição. Portanto, temos que $\sigma(q) = q + 1$, ou seja q é primo. Temos assim que $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, sendo $2^p - 1$ é primo. □

Com esse resultado para cada primo de Mersenne teremos um número perfeito par. Até o momento já foram encontrados 44 primos de Mersenne, sendo que o último[6], $p = 2^{32582657} - 1$, com 9.808.358 dígitos. Observe que se cada um dos dígitos desse número primo tivesse 1 cm, ele próprio teria quase 100 km. Incrível!

Mas mesmo tendo encontrado primos de Mersenne grandes ainda não se sabe demonstrar que existem infinitos primos de Mersenne nem que existem infinitos primos p para os quais $M_p = 2^p - 1$ é composto.

Tomando $p = 2^{32582657} - 1$ o maior primo de Mersenne conhecido, temos que $q = 2^{32582656}p$ é o maior número perfeito conhecido.

Exercício 3. *Mostre que todo número perfeito N par é triangular e que se $N > 6$ tem-se que $\frac{N-1}{9}$ é também triangular*[7].

Afirmação 8. *Se $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ é um número perfeito, então o produto de seus divisores é n^p.*

Demonstração. Denotaremos por $P = 2^p - 1$ o primo de Mersenne. Neste caso os divisores de n são do tipo $2^i P^j$, com $0 \leq i \leq p - 1$ e $0 \leq j \leq 1$. Assim o produto dos divisores de n será

$$\begin{aligned} 2^0 P^0 2^1 P^0 \cdots 2^{p-1} P^0 2^0 P^1 2^1 P^1 \cdots 2^{p-1} P^1 &= 2^{1+2+\cdots+(p-1)}.2^{1+2+\cdots+(p-1)}.P^p \\ &= 2^{\frac{p(p-1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2}} P^p \\ &= 2^{p(p-1)} P^p = (2^{p-1} \cdot P)^p = n^p. \end{aligned}$$

□

Afirmação 9. *A soma dos recíprocos dos divisores de um número perfeito é 2.*

[6] O último número primo de Mersenne foi descoberto em 2006.[Consulte na Internet a página http://primes.utm.edu]

[7] Números triangulares são aqueles da forma $\frac{n(n+1)}{2}$, com n natural, (veja [7])

Demonstração. Seja n o número perfeito e $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_r$ seus divisores.
Observe que os conjuntos $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_r\}$ e $\{\frac{n}{a_1}, \frac{n}{a_2}, \frac{n}{a_3},\ \ldots, \frac{n}{a_r}\}$ são iguais, isto é, para cada divisor a_i de n existe um $1 \leq j \leq r$ tal que $a_i = \frac{n}{a_j}$. logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_r} &= \frac{1}{n}(n\frac{1}{a_1} + n\frac{1}{a_2} + \ldots + n\frac{1}{a_r}) \\ &= \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_r) = \frac{1}{n}.2n = 2 \end{aligned}$$

□

Notação: $a \overset{k}{\equiv} b$, a congruente a b módulo k, isto é, a e b deixam mesmo resto na divisão por k ou, equivalentemente, $a - b$ é divisível por k.

Afirmação 10. *Se $N > 6$ é um número perfeito par, então $N - 1$ é divisível por 3.*

Demonstração. Como $N > 6$ e $N = 2^{p-1}(2^p - 1)$, temos que, $2^p \overset{3}{\equiv} 2$, donde concluímos que, $2^p - 1 \overset{3}{\equiv} 1$ e $2^{p-1} \overset{3}{\equiv} 1$, logo $2^{p-1}(2^p - 1) \overset{3}{\equiv} 1$. Portanto, $3\big|\big[2^{p-1}(2^p - 1) - 1\big]$ ou seja $N - 1$ é divisível por 3. □

Afirmação 11. *Todo número perfeito par termina em 6 ou 8.*

Demonstração. Seja $N = 2^{p-1}(2^p - 1) = 2^{p-1}2^p - 2^p$ o número perfeito par em questão, se $p = 2$ temos $N = 6$. Vamos agora provar para $p > 2$, observe que

$$2^n \overset{10}{\equiv} \begin{cases} 2, & \text{se } n \overset{4}{\equiv} 1 \\ 4, & \text{se } n \overset{4}{\equiv} 2 \\ 8, & \text{se } n \overset{4}{\equiv} 3 \\ 6, & \text{se } n \overset{4}{\equiv} 0. \end{cases}$$

Como p um primo maior que 2 temos que $p - 1$ é par, assim teremos,

$$2^{p-1} \overset{10}{\equiv} \begin{cases} 4, & \text{se } p-1 \overset{4}{\equiv} 2 \\ 6, & \text{se } p-1 \overset{4}{\equiv} 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad 2^p \overset{10}{\equiv} \begin{cases} 8 & \text{se } p-1 \overset{4}{\equiv} 2 \\ 2, & \text{se } p-1 \overset{4}{\equiv} 0 \end{cases}$$

donde concluímos que

$$2^{p-1}2^p \overset{10}{\equiv} \begin{cases} 2, \text{ se } p-1 \overset{4}{\equiv} 2 \\ 2, \text{ se } p-1 \overset{4}{\equiv} 0 \end{cases},$$

logo

$$2^{p-1}2^p - 2^{p-1} \overset{10}{\equiv} \begin{cases} 2-4 \overset{10}{\equiv} 8, \text{ se } p-1 \overset{4}{\equiv} 2 \\ 2-6 \overset{10}{\equiv} 6, \text{ se } p-1 \overset{4}{\equiv} 0. \end{cases}$$

Portanto, qualquer que seja o resto deixado por $p-1$ na divisão por 4, teremos que o resto deixado por um número perfeito par na divisão por 10 será 6 ou 8.

□

Afirmação 12. *A soma interativa dos algarismos de um número perfeito par que não o 6 é 1, isto é, dado um número perfeito par se somarmos os seus algarismos em seguida somarmos os algarismos do resultado obtido e assim sucessivamente, teremos ao final 1.*

Demonstração. Primeiro vamos observar que a soma interativa de um número é simplesmente a sua classe de congruência módulo 9, pois se $N = a_r \cdots a_1 a_0$ sendo a_i com $i \in \{0, 1, 2, \ldots, r\}$ os dígitos do número N, então

$$N = \sum_{i=0}^{r} a_i 10^i \overset{9}{\equiv} \sum_{i=0}^{r} a_i (1)^i = \sum_{i=0}^{r} a_i.$$

Basta agora mostrar que se N é perfeito par então $N \overset{9}{\equiv} 1$. Seja $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ um número perfeito par. Se $n \overset{3}{\equiv} 0$ ou seja 3 divide n teremos que n não é primo e portanto $2^n - 1$ também não é primo, assim N não é perfeito. Se $n \overset{3}{\equiv} 1$, isto é $n = 3k_1 + 1$ para algum $k_1 > 0$, como n é primo e $N \neq 6$, segue que n é ímpar, conseqüentemente podemos escrever $n = 3k_1 + 1 = 6k + 1$, assim $N = 2^{6k}(2^{6k+1} - 1) = (2^6)^k[2(2^6)^k - 1]$. como $2^6 \overset{9}{\equiv} 1$ segue que $N \overset{9}{\equiv} 1(2-1) = 1$. Agora no caso em que $n \overset{3}{\equiv} 2$, isto é, $n = 3k_2 + 2$ para algum k_2 natural, como n não é par, temos que k_2 é ímpar, portanto podemos escrever $n = 6k + 5$ onde $k_2 = 2k + 1$.

Logo

$$\begin{aligned} N &= 2^{6k+4}(2^{6k+5}-1) \\ &= 16(2^6)^k[32(2^6)^k-1] \\ &\overset{9}{\equiv} 16(1)[32(1)-1] \\ &\overset{9}{\equiv} (-2)[(-4)-1] \\ &\overset{9}{\equiv} 10 \overset{9}{\equiv} 1. \end{aligned}$$

□

Vejamos um exemplo.

Exemplo 5. *Tomemos o número perfeito 496. A soma de seus algarismos é 19, que por sua vez possui soma 10, cuja soma é 1.*

Afirmação 13. *Um número perfeito par $N = 2^{n-1}(2^n-1)$ escrito na base 2 têm os n primeiros dígitos iguais a 1 seguidos de $n-1$ zeros, isto é, $N = (\underbrace{11\cdots1}_{n}\underbrace{00\cdots0}_{n-1})_2$.*

Demonstração. Sabemos que a soma $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1} = 2^n-1$, portanto

$$N = 2^{n-1}(2^n-1) = 2^{n-1}(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}) = 2^{n-1}+2^n+\cdots+2^{2n-2}.$$

□

Veja a representação de alguns números perfeitos na base 2. $6 = (110)_2$, $28 = (11100)_2$, $496 = (111110000)_2$.

Com essa propriedade encerramos nossa coletânea e deixamos aqui, através das referências indicadas abaixo, o convite ao leitor interessado neste assunto, para ler e se deliciar de outras belas propriedades que cercam os números perfeitos e primos de Mersenne.

Bibliografia

[1] Souza, J. C. M. *Matemática Divertida e Curiosa*, RECORD, RJ, 2002.

[2] Boyer, C. B. *História da Matemática*, Ed. Edgard Blucher, 2a. edição, trad. Elza E. Gomides, SP. 1999.

[3] Davis, S. it A proof of the odd Perfect Number conjecture, Number Theory,(preprint) 2004. [arxiv.org/abs/hep-th/0401052; acesso em 25/09/2007]

[4] Ribenboim, P. *Números Primos: mistérios e recordes*, Coleção Matemática Universitária,IMPA RJ. 1999.

[5] Guy, R.K. *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlar, New York, 1982.

[6] Ore, O. *Nunber Theory and this History*,Dover Plublications, New York, 1988.

[7] Domingues, H.H., *Fundamentos de Aritmética*, Atual Editora, SP, 1988.

[8] Alencar Filho,E., *Funções Aritiméticas Números Notáveis*,Atual Nobel, SP, 1988.

[9] *The Largest Known Primes* [primes.utm.edu; acesso em 25/09/2007].

[10] *The digital sum of a perfect number of Euclid's type is 1* [www-maths.swan.ac.uk/pgrads/bb/project/node7.html; acesso em 22/11/2007].

Autor: Alacyr José Gomes

Endereço: Universidade de Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74.001-970 Goiânia, GO, Brasil
alacyr@mat.ufg.br

Autor: Eudes Antonio da Costa

Endereço: Universidade de Federal do Tocantins
Campus Universitário de Arraias

Curso de Matemática
Av. Universitária, s/n, Centro
77.330-000 Arraias, TO, Brasil
eudes@uft.edu.br

Autor: Ronaldo Antonio dos Santos

Endereço: Universidade de Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74.001-970 Goiânia, GO, Brasil
rasantos@mat.ufg.br

Objetivo e Política Editorial

A Revista da Olimpíada tem como objetivo ser um veículo de difusão, principalmente, das Olimpíadas de Matemática do Estado de Goiás, promovidas pelo IME/UFG.

A Revista também está aberta a contribuições de pequenas matérias, subordinados à boa qualidade. O material submetido para a publicação deverá ser de interesse do Ensino Fundamental e Médio, estar bem redigido, em estilo claro, sem aridez, de forma que desperte o interesse do leitor.

Submissão e Aceite

Toda matéria submetida para publicação deve ser enviada ao Comitê Editorial. Matérias redigidas em TEX ou LATEX podem ser submetidas por e-mail: omeg@mat.ufg.br. Se existirem ilustrações no trabalho submetido, estas devem ser encaminhadas, juntamente com o trabalho, e precisam estar em condições de serem reproduzidas, sem retoques. Além disso, cópias dos desenhos e ilustrações devem ser afixadas em espaços apropriados do texto, exibindo, dessa maneira, como deverá ficar a apresentação final do trabalho.

As referências bibliográficas devem ser colocadas no final do texto, em ordem alfabética, segundo as normas da ABNT.

As matérias submetidas para publicação serão analisadas pelos editores que poderão solicitar pareceres ad hoc e o autor receberá a resposta sobre sua matéria num prazo máximo de 120 dias.

Os autores que tiverem os trabalhos aceitos deverão transferir seus direitos autorais para o Instituto de Matemática e Estatística da UFG.