



Nº 8
junho/2013
ISSN 1518-6075

revista
DA OLIMPÍADA
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

**Dados Internacionais de Catalogação da Publicação(CIP)
(GPT/BC/UFG)**

Revista da Olimpíada/Universidade Federal de Goiás/ Instituto
de Matemática e Estatística. N^o 8 (jun.2013/jun. 2014).
Goiânia: Editora da UFG, 2013-v. Anual.
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Comitê Editorial

Ronaldo Alves Garcia, José Hilário da Cruz, Geci José Pereira da Silva,
Rogerio Queiroz Chaves, Ole Peter Smith, Ticianne Proença Bueno
Adorno (editora chefe).

Editoração

José H. da Cruz

Arte da Capa

Anderson F. da Silva

Anderson V. Macêdo (logomarca)

Tiragem

1.500 exemplares

Postagem

1^o semestre de 2013

Revista da Olimpíada, n^o 8, 2013

Universidade Federal de Goiás

Instituto de Matemática e Estatística

Campus Samambaia

Caixa Postal 131

74.001-970 - Goiânia - Goiás

Tel.: (62) 3521 1208, Fax: (62) 3521 1180

Versão eletrônica disponível em: www.ime.ufg.br/omeg

Os artigos assinados são da responsabilidade dos autores.

É permitida a reprodução, desde que seja citada a fonte.



Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás* é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e estudantes do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática.*

Esperamos que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, o leitor faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado transmitindo-o a seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação.

Acreditamos que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade e nossa atenção para este fato é que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, junho de 2013

Os Editores.

Universidade Federal de Goiás

Edward Madureira Brasil

Reitor

Eriberto Francisco Bevilaqua Marin

Vice-Reitor

Sandramara Matias Chaves

Pró-Reitora de Graduação

Divina das Dores de Paula Cardoso

Pró-Reitora de Pesquisa e Graduação

Orlando Afonso Valle do Amaral

Pró-Reitor de Administração e Finanças

Jeblin Antônio Abraão

Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional e Recursos Humanos

Anselmo Pessoa Neto

Pró-Reitor de Extensão e Cultura

Júlio César Prates

Pró-Reitor de Assuntos da Comunidade Universitária

Geci José Pereira da Silva

Diretor do Instituto de Matemática e Estatística

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Comissão Organizadora

Ticianne Proença Bueno Adorno (coordenadora), Geci José Pereira da Silva, Rogerio Queiroz Chaves e Ole Peter Smith

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística

Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO

Correio eletrônico: omeg@mat.ufg.br Tel:(62)3521-1208 Fax:(62)3521-1180

Site: www.ime.ufg.br/omeg

Índice

Classificados na XXI OMEG - 2012	1
Nível 1	1
Nível 2	2
Nível 3	3
Soluções Comentadas das Provas XXI OMEG - 2012	4
1.1 Provas da XXI OMEG	4
Nível 1	4
Nível 2	6
Nível 3	8
1.2 Resolução comentada	11
Nível 1	11
Nível 2	14
Nível 3	17
Sequências Recorrentes	25
1.1 Sequências recorrentes lineares	26
1.2 A sequência de Fibonacci	29
1.3 A recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2$	31
1.4 Fórmulas gerais para sequências recorrentes lineares	33
Semigrupos Numéricos e o Teorema de Sylvester	47
1.1 Introdução	47
1.2 Demonstração do Teorema de Sylvester	50
1.2.1 Demonstração do Teorema 2	54
1.2.2 Demonstração do Teorema 3	56
1.3 Estrutura dos semigrupos gerados por 2 elementos	56
1.4 Recíproca do Teorema de Sylvester	58
1.5 Semigrupos com 3 geradores	61
1.6 Conclusão	66



Classificados na XXI OMEG - 2012

Nível 1 (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

MEDALHA DE OURO

- ★ *Julia Cordeiro Gusmão*/Colégio Externato São José - Goiânia

MEDALHA DE PRATA

- ★ *Gabriel Neil Cruvinel*/Colégio Victória Figueiredo - Goiânia

MEDALHA DE BRONZE

- ★ *Laís Ribeiro Torres*/Colégio Progressivo - Goiânia

MENÇÃO HONROSA

- ★ *Karoline Lemes Faria*/Colégio Santo Agostinho - Goiânia
- ★ *Abner Eduardo Silveira Santos*/Colégio Crescer - Anápolis
- ★ *Daniel Vandrê Barbosa*/Colégio Ávila - Goiânia
- ★ *Rayane Cavalcanti Teixeira*/Colégio Marista - Goiânia
- ★ *Carolina Kurotusch Canattieri*/Colégio Degraus - Goiânia
- ★ *Douglas Florêncio de Sousa*/Colégio Ateneu Dom Bosco - Goiânia
- ★ *Gabriel Rezende Abrahão*/Colégio Galileu - Goiânia
- ★ *Carolina Soares Lôbo*/Colégio Olimpo - Goiânia
- ★ *Gabriel Rodrigues Pinheiro França*/Colégio Externato São José - Goiânia
- ★ *Laisa Gonçalves Ribeiro*/Colégio Professora Yolanda - Goiânia
- ★ *Lucas Gonçalves de Oliveira*/Colégio Ávila - Goiânia

★ *Márcio Martins de Castro A. Filho*/Studium Ensino Fundamental - Goiânia

★ *Matheus Laureano Nunes Barbosa*/Colégio Ávila - Goiânia

★ *Matheus Laureano Nunes Barbosa*/Colégio Ávila - Goiânia

★ *Vicente Romeiro de Moraes*/Studium Ensino Fundamental - Goiânia

Nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

MEDALHA DE OURO

★ *Thiago Lucas Faustino da Silva*/CPMG - Dionária Rocha - Itumbiara

MEDALHA DE PRATA

★ *Arthur Santana Silva*/Colégio Expovest - Goiânia

MEDALHA DE BRONZE

★ *Luis Gustavo Zacarias Rizinoto*/Colégio Crescer - Anápolis

★ *Matheus Felipe Cavalcante de Almeida*/Colégio Victória Figueiredo - Goiânia

MENÇÃO HONROSA

★ *Pedro Henrique Machado Bariani*/Colégio Agostiniano - Goiânia

★ *Matheus Uchôa Constante*/Instituto Presbiteriano de Educação - Goiânia

★ *Pedro Antônio Gonçalves dos Santos*/CPMG - Dionária Rocha - Itumbiara

★ *Bianca Soares de Sá Peixoto*/Colégio Olimpo - Brasília

★ *Gustavo Peraro Rodovalho*/Colégio Expovest - Goiânia

★ *João Luis Reis Freitas*/Colégio Santo Agostinho - Goiânia

★ *Maria Fernanda Aurea de Pina*/Colégio Crescer - Goiânia

★ *Lucca Borges Prado*/Colégio Externato São José - Goiânia

- ★ *Artur Pimpão de Paula*/Colégio Olimpo - Brasília
- ★ *Maria Chaer de Souza Cruvinel*/Colégio Olimpo - Goiânia
- ★ *Matheus Carlos Lima Silva*/Colégio Santo Agostinho - Goiânia.

Nível 3 (Ensino Médio)

MEDALHA DE OURO

- ★ *Marcelo Kuramoto*/Colégio Agostiniano - Goiânia.

MEDALHA DE PRATA

- ★ *Gabriel de Cavalho Tollini*/Colégio Classe - Goiânia.
- ★ *Leonardo de Paula Pinati*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.

MEDALHA DE BRONZE

- ★ *Pollyana Alves Resende*/Colégio Progressivo - Goiânia

MENÇÃO HONROSA

- ★ *Vitor Vêncio*/Colégio Classe - Goiânia
- ★ *Leonardo Enrico Marchioro Mendes*/Colégio Olimpo - Goiânia
- ★ *Lucas Carvalho Daher*/Colégio Galileu - Anápolis
- ★ *Mariana Ferreira*/Colégio Santo Agostinho - Goiânia
- ★ *Rafael Rodrigues Caetano*/Colégio Metropolitano - Goiânia
- ★ *Rodinéli Mendes Moreira*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia
- ★ *João Claudio Neves Simão*/Colégio Olimpo - Goiânia
- ★ *Victor Hugo Carvalho Calvin Vaz*/Colégio Olimpo - Goiânia
- ★ *Caio Pereira Dantas*/Colégio Prevest Sul - Goiânia
- ★ *André Bergo de Moraes*/Colégio Olimpo - Goiânia
- ★ *Yuri Luiz Dias Martins*/Colégio Metropolitano - Goiânia



Soluções Comentadas das Provas da XXI OMEG - 2012

Rogério de Queiroz Chaves, Helvecio Pereira de Castro,
Durval José Tonon e Valdivino Vargas Junior

Resumo. Apresentamos, a seguir, uma resolução comentada das questões da OMEG de 2012, em que procuramos incorporar, tanto quanto possível, ideias e argumentos apresentados pelos estudantes participantes da OMEG em suas provas, mencionando seus nomes. Para alguns dos problemas, são apresentados comentários adicionais que podem esclarecer e expandir o contexto do problema original, bem como apresentar possibilidades de generalização e propor outros problemas relacionados. Recomendamos que, antes de ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas por sua conta e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso apresentamos, inicialmente, apenas o texto dos problemas, com as resoluções seguindo-os em separado.

1.1 Provas da XXI OMEG

Nível 1

1. Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso: agrupando-as três a três sobraram duas bolinhas; agrupando-as quatro a quatro, também sobraram duas e o mesmo aconteceu quando ele as agrupou cinco a cinco e seis a seis.

- (a) Se o número de bolinhas não chega a 100, quantas bolinhas Lucas possui?
- (b) De todos os números que tem a propriedade descrita no enunciado, ou seja, suas divisões por 3, 4, 5 e 6 deixam resto 2, qual é o que fica mais próximo de 2012?

2. Chamemos de “partição em uns” de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1. Por exemplo $30 = 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1$ é a partição em uns do número 30 e possui dez parcelas.

- (a) Qual é a partição em uns de 2012?
- (b) Dentre os números menores que 2012 determine aquele cuja partição em uns tem o maior número de parcelas.

3. Um experimento com peixes envolve cinco tanques, numerados de 1 a 5, contendo, inicialmente, as quantidades de peixes descritas na tabela abaixo.

Tanque	1	2	3	4	5
Número de Peixes	100	200	300	400	500

Uma vez por dia os seguintes passos são realizados:

- um peixe é retirado do tanque 1 e colocado no tanque 2;
- dois peixes são retirados do tanque 2 e colocados no tanque 3;
- três peixes são retirados do tanque 3 e colocados no tanque 4;
- quatro peixes são retirados do tanque 4 e colocados no tanque 5;

Se algum dos tanques não tiver mais peixes, o passo correspondente é ignorado e passa-se ao passo seguinte.

- (a) Quantos dias são necessários para que todos os peixes estejam no tanque 5?
- (b) Quantos peixes estarão no tanque 2 ao final do 149º dia?
- (c) Quantos peixes haverá em cada tanque ao final do 172º dia?

4. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Determine qual é o número máximo de cartões que se pode obter se as medidas da folha de papel forem

(a) $13\text{ cm} \times 13\text{ cm}$

(b) $130\text{ cm} \times 130\text{ cm}$

5. Em um certo carro de passeio com tração dianteira os pneus dianteiros gastam-se mais rapidamente que os traseiros de modo que, se não for feito um rodízio dos pneus, os que rodam na dianteira duram 40.000 km, enquanto que os traseiros duram 50.000 km. Uma estratégia que pode ser usada para que os quatro pneus terminem sua vida útil ao mesmo tempo é o rodízio, que consiste de passar os pneus traseiros para a frente e os dianteiros para a traseira depois de terem rodado por algum tempo.

Começando com quatro pneus novos, se o rodízio for feito apenas uma vez, com qual quilometragem ele deve ser feito para que todos os pneus terminem sua vida útil ao mesmo tempo?

6. O maior círculo que se pode desenhar dentro de um quadrado passa pelos pontos médios dos lados do quadrado e ocupa, aproximadamente, 78,5% da área do quadrado.

O maior quadrado que se pode desenhar dentro de um círculo tem seus quatro vértices sobre o contorno do círculo. Neste caso, quanto da área do círculo é ocupada pelo quadrado?

Nível 2

1. Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso: agrupando-as duas a duas sobrou uma bolinha, agrupando-as três a três sobraram duas; quatro a quatro, sobraram três; cinco a cinco sobraram quatro e seis a seis sobraram cinco.

(a) Se o número de bolinhas não chega a 100, quantas bolinhas Lucas possui?

(b) De todos os números que tem a propriedade descrita no enunciado, ou seja, suas divisões por 2, 3, 4, 5 e 6 deixam resto 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, qual é o que fica mais próximo de 2012?

2. Chamemos de “partição em uns” de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1. Por

exemplo $30 = 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1$ é a partição em uns do número 30 e possui dez parcelas.

- (a) Qual é a partição em uns de 2012?
- (b) Dentre os números menores que 2012 determine aquele cuja partição em uns tem o maior número de parcelas.

3. Um experimento com peixes envolve cinco tanques, numerados de 1 a 5, contendo, inicialmente, as quantidades de peixes descritas na tabela abaixo.

Tanque	1	2	3	4	5
Número de Peixes	100	200	300	400	500

Uma vez por dia os seguintes passos são realizados:

- um peixe é retirado do tanque 1 e colocado no tanque 2;
- dois peixes são retirados do tanque 2 e colocados no tanque 3;
- três peixes são retirados do tanque 3 e colocados no tanque 4;
- quatro peixes são retirados do tanque 4 e colocados no tanque 5;

Se algum dos tanques não tiver mais peixes, o passo correspondente é ignorado e passa-se ao passo seguinte.

- (a) Quantos dias são necessários para que todos os peixes estejam no tanque 5?
- (b) Quantos peixes estarão no tanque 2 ao final do 149º dia?
- (c) Quantos peixes haverá em cada tanque ao final do 172º dia?

4. O maior círculo que se pode desenhar dentro de um quadrado passa pelos pontos médios dos lados do quadrado e ocupa, aproximadamente, 78,5% da área do quadrado. O maior quadrado que se pode desenhar dentro de um círculo tem seus quatro vértices sobre o contorno do círculo. Quanto da área do círculo é ocupada por esse quadrado?

5. Usualmente o perímetro e área de um retângulo são calculados conhecendo-se as medidas dos lados. Entretanto, a recíproca desse fato também é verdadeira, isto é, as medidas dos lados de um retângulo podem ser determinadas conhecendo-se seu perímetro e sua área, embora nem sempre exista um retângulo cujo perímetro e área sejam dois números dados arbitrariamente.

- a) Determine os lados de um retângulo com perímetro medindo 30 cm e área medindo 56 cm^2 ;
- b) Determine que relação dois números, A e P , precisam satisfazer para que exista um retângulo com área A e perímetro P .

6. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$. Determine qual é o número máximo de cartões que se pode obter se as medidas da folha de papel forem

- (a) $13 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$
- (b) $130 \text{ cm} \times 130 \text{ cm}$
- (c) $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$

Nível 3

1. Chamemos de “partição em uns” de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1. Por exemplo $30 = 11 + 11 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 \cdot 11 + 8 \cdot 1$ é a partição em uns do número 30 e possui dez parcelas.

- (a) Qual é a partição em uns de 2012?
- (b) Dentre os números menores que 2012 determine aquele cuja partição em uns tem o maior número de parcelas.

2. Um experimento com peixes envolve cinco tanques, numerados de 1 a 5, contendo, inicialmente, as quantidades de peixes descritas na tabela abaixo.

Tanque	1	2	3	4	5
Número de Peixes	100	200	300	400	500

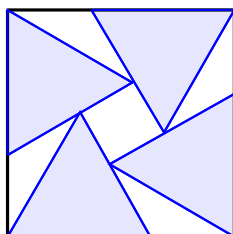
Uma vez por dia os seguintes passos são realizados:

- um peixe é retirado do tanque 1 e colocado no tanque 2;
- dois peixes são retirados do tanque 2 e colocados no tanque 3;
- três peixes são retirados do tanque 3 e colocados no tanque 4;
- quatro peixes são retirados do tanque 4 e colocados no tanque 5;

Se algum dos tanques não tiver mais peixes, o passo correspondente é ignorado e passa-se ao passo seguinte.

- (a) Quantos dias são necessários para que todos os peixes estejam no tanque 5?
- (b) Quantos peixes estarão no tanque 2 ao final do 149º dia?
- (c) Quantos peixes haverá em cada tanque ao final do 172º dia?

3. Um tetraedro foi construído tendo como faces quatro triângulos equiláteros recortados de um quadrado com área de 1 m^2 como indicado na figura abaixo.



Calcule o volume do tetraedro.

4. Duas pessoas jogam “par ou ímpar” da seguinte forma: um dos jogadores escolhe a opção “par” e o outro “ímpar”. Então, num mesmo instante, cada jogador apresenta, com os dedos, um número de um a cinco. Se o total de dedos mostrados for par, ganha o jogador que escolheu “par”, caso contrário o outro jogador ganha.

- (a) Se os dois jogadores escolherem os números que vão jogar de maneira aleatória, com qualquer um dos cinco números tendo a mesma probabilidade de ser escolhido, qual dos dois tem maior chance de ganhar?
- (b) Se o jogador que escolheu “par” assumir que o outro jogará aleatoriamente, que estratégia pode adotar para maximizar suas chances de ganhar?
- (c) Se ambos os jogadores pensarem como no item (b), ou seja, assumirem que o oponente jogará aleatoriamente e adotarem esse tipo de estratégia para tentar aumentar suas chances, qual dos dois ganha?

5. Apenas conhecendo-se o perímetro e a área de um triângulo não se pode determinar, de maneira única, as medidas do mesmo. Em geral, um triângulo qualquer (não equilátero) pode ser “deformado” continuamente de modo a se obter uma infinidade de triângulos não congruentes, todos tendo perímetro e área iguais aos do triângulo inicial.

- (a) Considere o triângulo isósceles com base medindo 14 cm e os outros dois lados medindo 10 cm cada um. Determine os lados de outro triângulo isósceles (não congruente com esse) que tenha mesmo perímetro e mesma área que esse.
- (b) Existe algum par de valores de área e perímetro para os quais é possível obter três triângulos isósceles, dois a dois não congruentes, com mesma área e perímetro?

6. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Determine qual é o número máximo de cartões que se pode obter se as medidas da folha de papel forem

- (a) $13\text{ cm} \times 13\text{ cm}$
- (b) $130\text{ cm} \times 130\text{ cm}$
- (c) $65\text{ cm} \times 65\text{ cm}$ (DICA: verifique que qualquer retângulo no formato $21 \times n$ com $n \geq 12$ pode ser coberto de maneira exata, ou seja, sem sobra nem falta, por retângulos 7×3 .)

1.2 Resolução comentada

Nível 1

1. *Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso...* (baseado nas soluções apresentadas por *Abner Eduardo Silveira Santos, Karoline Lemes Faria, Matheus Laureano Nunes Barbosa e Vicente Romeiro de Moraes*)

- (a) Como sempre sobram duas bolinhas nas divisões mencionadas no enunciado, se duas bolinhas forem retiradas do total, o número de bolinhas restantes deve ser divisível por 3, 4, 5 e 6, cujo menor múltiplo comum é 60. Assim o total de bolinhas tem que ser um múltiplo de 60 mais as duas bolinhas retiradas. Se o número não chega a 100, só pode ser 62.
- (b) Dividindo 2012 por 60, obtemos $2012 = 33 \cdot 60 + 32 = 1980 + 32$, como 1980 é múltiplo de 60, 1982 tem a propriedade descrita no enunciado. O próximo número com esta propriedade é $1982+60=2042$ e tanto um quanto o outro ficam a 30 unidades de 2012.

Observação: Outros alunos que tiveram nota máxima nesse problema (*Carolina Soares Lôbo, Laís Ribeiro Torres e Lucas Gonçalves de Oliveira*) argumentaram com base em critérios de divisibilidade de números inteiros. O algarismo de unidade do número de bolinhas (depois de retiradas duas) deve ser 0 ou 5, por esse número ser divisível por 5. Por outro lado, como é divisível por 4 então ele é par, e deve terminar em um algarismo par. Assim concluem que esse número termina em 0, isto é, corresponde a um número inteiro de dezenas. Além disso esse número de dezenas deve ser divisível por 2 e por 3. Portanto, 6 dezenas mais 2 unidades (62) é a resposta do item (a) e para o item (b) a resposta é obtida por exclusão de dezenas a partir de 2012 utilizando o critério de divisibilidade por 3.

2. Chamemos de “partição em uns” de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1... (baseado nas soluções apresentadas por *Abner Eduardo Silveira Santos* e *Gabriel Neil Cruvinel*)

- (a) Para decompor no menor número de parcelas, devemos utilizar as maiores parcelas possíveis. Como 1111 cabe uma vez em 2012, obtemos $2012 - 1111 = 901$. Retirando agora oito parcelas de 111, temos $901 - 888 = 13 = 11 + 1 + 1$. Assim, $2012 = 1111 + 8 \times 111 + 11 + 1 + 1$, com 12 parcelas
- (b) Note que na partição em uns, se houver 11 parcelas de um mesmo tipo, elas podem ser substituídas por parcelas maiores. Além disso, com dez parcelas de um mesmo tipo, não pode haver parcelas ainda menores, pois basta somar 1 às dez parcelas, para se obter uma parcela com uns maior que as anteriores. Desta forma, o maior número de parcelas pode ser obtido tomando-se $10 \times 1 + 9 \times 11 + 9 \times 111 = 1108$, com 28 parcelas.

Observação: Na resolução do item (b), não aparecem todos os elementos que poderiam estar presentes caso a cota 2012 fosse substituída por outro número maior, de forma que análise a seguir indica, de maneira mais completa, como a solução pode ser generalizada.

Dentre os números menores que 2012 aqueles que são menores que 1111 serão decompostos em parcelas de 1, 11 e 111. Dentre eles a quantidade máxima de parcelas é obtida com o número $n = 9 \times 111 + 9 \times 11 + 10 \times 1 = 1108$, totalizando 28 parcelas. Para números entre 1111 e 2012 a “partição em uns” teria necessariamente o 1111 e o resto r , que é menor que 901 (diferença entre 2012 e 1111) seria também “particionado” em parcelas de 1, 11 e 111. Se houvesse algum deles com 28 ou mais parcelas, forçosamente o resto r seria “particionado” em 27 ou mais parcelas. Porém o **menor** número que pode ser “particionado” em 27 parcelas (de 1, 11 e 111) é $8 \times 111 + 9 \times 11 + 10 = 997$ (subtração da maior parcela, 111). Como r é menor que 997 (pois é menor que 901), então a quantidade de parcelas dele é menor que 27, e assim todo número maior que 1111 (e, claro, menor que 2012) tem menos de 28 parcelas, sendo portanto 1108 o número com maior quantidade de parcelas.

Essas considerações são necessárias, pois podem existir várias soluções para o problema, dependendo da cota fixada. Por exemplo: Para números menores que 3330 existem **quatro** soluções: **2219** ($= 1 \times 1111 + 9 \times 111 + 9 \times 11 + 10 \times 1$); **3219** ($= 2 \times 1111 + 8 \times 111 + 9 \times 11 + 10 \times 1$); **3319** ($= 2 \times 1111 + 9 \times 111 + 8 \times 11 + 10 \times 1$) e **3329** ($2 \times 1111 + 9 \times 111 + 9 \times 11 + 9 \times 1$). Todas com 29 parcelas.

3. *Um experimento com peixes envolve cinco tanques...*

Ver resolução do **problema 3** do **nível 2**.

4. *De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\text{ cm} \times 3\text{ cm}$...*

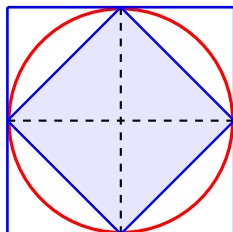
Ver resolução dos itens **(a)** e **(b)** do **problema 6** do **nível 3**.

5. *Em um certo carro de passeio com tração dianteira os pneus dianteiros gastam-se mais rapidamente...*

Ver resolução do **problema 5** do **nível 2**.

6. *O maior círculo que se pode desenhar dentro de um quadrado... (baseado na solução apresentada por Gabriel Neil Cruvinel)*

Desenhando um quadrado menor dentro do círculo inscrito no quadrado maior, não é difícil verificar que a área do quadrado menor é metade da área do maior. Basta desenhar o quadrado menor de maneira que seus vértices fiquem nos pontos médios do quadrado maior, como na figura abaixo.



Denotando por q a área do quadrado menor, Q a área do maior e c a área do círculo temos, então, aproximadamente, $c = 0,785 Q$ e $Q = 2q$, de onde obtemos

$$c = 1,57 q \Rightarrow \frac{q}{c} = \frac{1}{1,57} \approx 0,637, \text{ ou seja, } 63,7\%.$$

Nível 2

1. *Brincando com suas bolinhas de gude, Lucas notou um fato curioso...* (baseado nas soluções apresentadas por *Arthur Santana Silva, Thiago Lucas Faustino da Silva e Artur Pimpão de Paula*. Veja também as soluções e comentários para o problema 1 do nível 1)

- (a) Como sempre sobra uma bolinha a menos que o dividendo nas divisões mencionadas no enunciado, se uma bolinha for acrescentada ao total, o número de bolinhas resultante deve ser divisível por 2, 3, 4, 5 e 6, cujo menor múltiplo comum é 60, isto é, o número x com essa propriedade é tal que $x - 1$ é divisível por 2, 3, 4, 5 e 6. Logo o número de bolinhas é do tipo $60n - 1$ onde n é um inteiro positivo. Como, pelas condições do problema esse número não chega a 100, concluímos que é 59.
- (b) Analogamente ao item anterior, estamos interessados em encontrar o número x mais próximo de 2012 tal que $x - 1$ seja divisível por 2, 3, 4, 5, e 6. Dividindo 2012 por 60, obtemos $2012 = 33 \cdot 60 + 32 = 1980 + 32$, como 1980 é múltiplo de 60, 1979 tem a propriedade descrita no enunciado. O próximo número com esta propriedade é $1979 + 60 = 2039$, sendo este o mais próximo de 2012.
-

2. *Chamemos de “partição em uns” de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1...*

Ver resolução do **problema 2 do nível 1**.

3. *Um experimento com peixes envolve cinco tanques...* (baseado nas soluções apresentadas por *Arthur Santana Silva, Matheus Uchôa Constante e Maria Chaer de Souza Cruvinel*)

Inicialmente cada tanque, exceto o 5, perde um peixe por dia. O tanque 5 ganha 4 peixes por dia. Após 100 dias, o tanque 1 está vazio e o tanque 2 está com 100 peixes. A partir daí este último perde 2 peixes por dia e estará vazio em 50 dias. Assim, após 150 dias os tanques 1 e 2 estão vazios e o tanque 3 tem 150 peixes. A partir daí, o tanque 3 perde 3 peixes por dia, esvaziando-se em 50 dias. Pode-se então construir a seguinte tabela com os números de peixes ao final de alguns períodos chave:

Tanque	1	2	3	4	5
100 dias	0	100	200	300	900
150 dias	0	0	150	250	1100
200 dias	0	0	0	200	1300
250 dias	0	0	0	0	1500

- (a) A partir dos números obtidos acima, conclui-se que são necessários 250 dias para que todos os peixes estejam no tanque 5.
- (b) No 150º dia os dois últimos peixes do tanque 2 são retirados, então, ao final do 149º dia, dois peixes estarão no tanque 2.
- (c) Ao final de 150 dias, os tanques 1 e 2 não possuem mais peixes, o tanque 3 possui 150 e no tanque 4 restam 250. Nos próximos 22 dias, 66 são retirados do tanque 3, restando 87, e o número de peixes no tanque 4 decresce em 22, passando a 228. Os demais peixes estarão no tanque 5, ou seja $1500 - 228 - 87 = 1185$.

4. *De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\text{ cm} \times 3\text{ cm}$...*

Ver resolução dos itens (a) e (b) do **problema 6** do **nível 3**.

5. *Em um certo carro de passeio com tração dianteira os pneus dianteiros gastam-se mais rapidamente...* (Resolução proposta pela equipe da OMEG)

A ideia central aqui é que a fração consumida de cada pneu é proporcional à distância rodada, sendo que a vida útil do pneu, em quilômetros, muda, dependendo de o pneu rodar na dianteira ou na traseira. Após rodar x milhares de quilômetros, os pneus dianteiros terão gasto $x/40$ de sua vida útil e os traseiros $x/50$ (Por exemplo, rodando 20.000 km, consome-se metade da vida útil dos pneus dianteiros e $2/5$ dos traseiros). Restarão então

$$1 - \frac{x}{40} = \frac{40 - x}{40}$$

dos pneus dianteiros e

$$1 - \frac{x}{50} = \frac{50 - x}{50}$$

dos traseiros. Realizando o rodízio neste momento, os pneus que eram traseiros e foram passados para a frente podem rodar $(50 - x)/50$ de 40.000 km e os que eram dianteiros e foram passados para trás podem rodar $(40 - x)/40$ de 50.000 km. Para que os pneus se acabem ao mesmo tempo, estas duas quilometragens tem que ser iguais, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{50 - x}{50} \times 40.000 &= \frac{40 - x}{40} \times 50.000 \\ \Rightarrow (50 - x) \times 16 &= (40 - x) \times 25 \Rightarrow x = \frac{200}{9}. \end{aligned}$$

Logo, deve-se realizar o rodízio após rodar, aproximadamente, 22.222 km.

6. Usualmente o perímetro e a área de um retângulo são calculados conhecendo-se as medidas dos lados... (baseado nas soluções apresentadas por *Pedro Antônio Gonçalves dos Santos*, *Thiago Lucas Faustino da Silva* e *João Luís Reis Freitas*)

- (a) Denotando por x e y as dimensões do retângulo, é possível formar um sistema de equações através da expressão do perímetro, $2(x + y)$, e da área, xy .

$$\begin{cases} 2x + 2y &= 30 \\ xy &= 56 \end{cases}$$

Da primeira equação, obtemos $y = 15 - x$, que substituído na segunda equação leva a $x^2 - 15x + 56 = 0$, que tem as raízes

$x = 7$ e $x = 8$. Escolhendo qualquer um desses valores para x , $y = 15 - x$ será o outro. Portanto o retângulo procurado mede 7×8 .

- (b) Usando um raciocínio análogo ao do item anterior, consideramos $2x + 2y = P$ e $xy = A$, de onde obtemos $y = \frac{P}{2} - x$, que substituído na outra equação leva a $x^2 - \frac{P}{2}x + A = 0$. Esta equação só tem solução se o discriminante não for negativo, ou seja, se

$$\left(\frac{P}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot A \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P^2 - 16A}{4} \geq 0$$

Assim, para que exista um retângulo com área A e perímetro P , é necessário que $P^2 \geq 16A$. Caso valha a igualdade, a equação quadrática só tem uma raiz e o retângulo procurado é um quadrado.

Nível 3

1. Chamemos de “partição em uns” de um número sua decomposição no menor número possível de parcelas que só tenham o dígito 1...

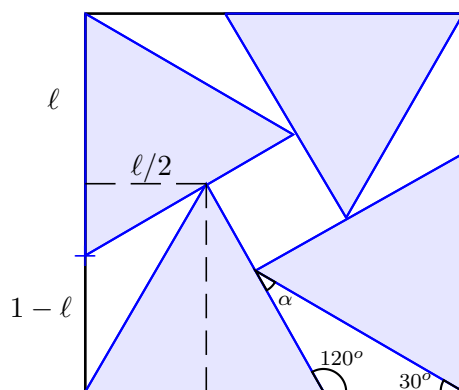
Ver resolução do **problema 2** do **nível 1**.

2. Um experimento com peixes envolve cinco tanques...

Ver resolução do **problema 3** do **nível 1**.

3. Um tetraedro foi construído tendo como faces quatro triângulos equiláteros recortados de um quadrado... (baseado nas soluções apresentadas por André Bergo de Moraes e Leonardo de Paula Pinati)

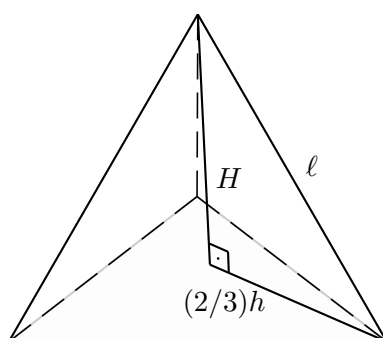
Levando-se em conta que em um triângulo equilátero cada ângulo interno tem 60° , o ângulo indicado por α na figura a seguir só pode ser de 30° . Assim, os quatro triângulos obtusângulos são isósceles.



Denotando por ℓ o lado dos triângulos equiláteros, o lado menor dos triângulos obtusângulos mede $1 - \ell$. Assim, do triângulo com um lado tracejado, medindo $\ell/2$ na figura, tem-se

$$\frac{\ell/2}{1 - \ell} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \approx 0,63 \text{ m.}$$

No tetraedro, a altura, H , é a medida do segmento que une um vértice ao centro da face oposta, como indica a figura a seguir. Neste caso, forma-se um triângulo retângulo em que a hipotenusa é uma das arestas do tetraedro, um dos catetos é $2/3$ da altura da base, h , e o outro cateto é a altura do tetraedro.



Por Pitágoras,

$$\ell^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \right)^2 + H^2 \Rightarrow H^2 = \frac{2\ell^2}{3} \Rightarrow H = \ell\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Assim, o tetraedro sendo uma pirâmide, seu volume é um terço do produto da área da base pela altura, ou seja,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \ell\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\ell^3 \sqrt{2}}{12} = \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^3 \frac{\sqrt{2}}{12} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4(1 + \sqrt{3})^3} = \frac{9\sqrt{2} - 5\sqrt{6}}{16} \approx 0,03 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Observações: Este problema, está relacionado a um problema mais difícil e muito interessante que é o seguinte: recortando triângulos de uma chapa quadrada de lado ℓ para construir um tetraedro regular, qual é o maior volume possível para o tetraedro? Para um outro problema interessante relacionado à otimização de cortes de peças em uma chapa, veja o **problema 6**, sobre empacotamentos de retângulos, a seguir.

4. *Duas pessoas jogam “par ou ímpar”... (baseado nas soluções apresentadas por Leonardo Eurico Marchioro Mendes, João Cláudio Neves Simão, Marcelo Kuramoto e Yuri Luiz Dias Martins)*

- (a) Se cada jogador tem cinco quantidades diferentes de dedos para apresentar, então pelo Princípio Fundamental da Contagem existem $5 \cdot 5 = 25$ resultados possíveis. Basta apresentar quantos desses apresentam soma ímpar. São eles (1,2), (1,4), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2) e (5,4). Assim, o jogador que escolheu “ímpar” tem probabilidade $12/25$ de ganhar. E o jogador que escolheu “par” tem probabilidade $1 - 12/25 = 13/25$. Portanto, o jogador que escolheu “par” tem maior chance de ganhar.
- (b) Se o outro jogador escolhe aleatoriamente é mais provável que escolha um número ímpar (de 1 a 5 tem-se três números ímpares e dois pares). Assim, a estratégia mais interessante para o jogador que escolheu “par” é apresentar um número ímpar de dedos, para aumentar as chances de o resultado final ser par.

- (c) Ambos os jogadores pensam que o outro tem maior probabilidade de apresentar uma quantidade ímpar de dedos. Portanto, o jogador que escolheu “par” apresentará um número ímpar de dedos e o jogador que escolheu “ímpar” apresentará um número par de dedos. Como a soma de um número ímpar com um número par dá resultado ímpar, o jogador que escolheu a opção “ímpar” ganhará.

5. *Apenas conhecendo-se o perímetro e a área de um triângulo não se pode determinar, de maneira única, as medidas de seus lados...* (baseado na solução apresentada por *Caio Pereira Dantas*)

- (a) O triângulo descrito no enunciado pode ser dividido ao meio em dois triângulos retângulos, com hipotenusa de 14 cm e catetos medindo 5 cm e h (a altura do triângulo). Aplicando o Teorema de Pitágoras a um desses triângulos, tem-se $14^2 = h^2 + 5^2$, donde $h = \sqrt{171}$. Temos, então,

$$\text{Perímetro} = 2p = 14 + 14 + 10 = 38$$

e

$$\text{Área} = \frac{bh}{2} = \frac{10\sqrt{171}}{2} = 5\sqrt{171}.$$

Para obter o outro triângulo isósceles, denotamos sua base por $2y$ e cada um dos lados iguais por x . De modo análogo, a altura, h , desse outro triângulo, é tal que

$$x^2 = y^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Assim,

$$2x + 2y = 2p = 38 \Rightarrow x + y = 19$$

e a área do triângulo deve ser

$$5\sqrt{171} = y\sqrt{(x + y)(x - y)} = y\sqrt{19(x - y)} = y\sqrt{19(19 - 2y)}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtém-se

$$25 \times 171 = y^2 \times 19(19 - 2y) \Rightarrow 2y^3 - 19y^2 + 225 = 0.$$

Como já se sabe, do primeiro triângulo, que $y = 5$ é raiz, podemos dividir o polinômio do lado esquerdo por $y - 5$, para obter uma fatoração da equação como $(y - 5)(y^2 - 9y + 45) = 0$. Neste caso as outras raízes são 7,5 e -3 , sendo que esta última não pode ser lado de um triângulo. Logo, $x = 19 - y = 19 - 7,5 = 11,5$. Portanto, o outro triângulo tem a base medindo 15 cm e os outros dois lados medindo 11,5 cm.

- (b) Como visto no item (a), denotando por $2y$ a base do triângulo isósceles e por x a medida dos outros dois lados, tem-se o perímetro $P = 2x + 2y$ e a altura h é tal que $x^2 = y^2 + h^2$, de forma que a área é

$$A = \frac{2yh}{2} = y \sqrt{x^2 - y^2} = y \sqrt{(x + y)(x - y)} = y \sqrt{\frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} - 2y \right)}$$

Assim,

$$A^2 = \frac{P^2}{4}y^2 - Py^3 \Rightarrow Py^3 - \frac{P^2}{4}y^2 + A^2 = 0,$$

que é a equação a ser satisfeita por y , metade da base de um triângulo isósceles com área A e perímetro P . Note que, pelas relações de Girard, o produto das três raízes y_1, y_2 e y_3 desta equação satisfaz

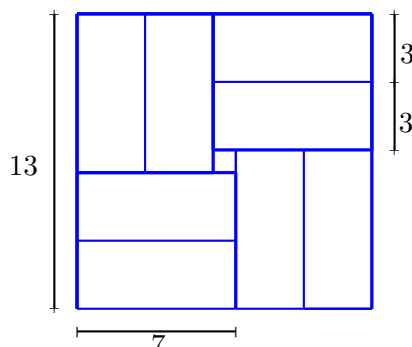
$$y_1 y_2 y_3 = \frac{-A^2}{P} < 0,$$

o que implica em um número ímpar de raízes negativas. Por outro lado, para haver três triângulos isósceles distintos, com mesma área e perímetro, as três raízes deveriam ser positivas. Portanto, a resposta à pergunta deste item é negativa.

6. De uma folha quadrada de papel serão recortados cartões retangulares de $7\text{ cm} \times 3\text{ cm}$... (baseado nas soluções apresentadas por Daniel Vandr e Barbosa, Karoline Lemes Faria, Marcelo Kuramoto e na proposta pela equipe da OMEG)

Antes de resolver cada item, é importante observar que a área de cada cartão é de $7 \cdot 3 = 21 \text{ cm}^2$, então dividindo-se a área da folha quadrada de papel por 21 obtém-se um limitante para o número de cartões retangulares que se pode obter. Entretanto, esse teto não necessariamente é possível de se atingir. Por exemplo, de um quadrado 8×8 só é possível recortar dois retângulos 7×3 , embora sobrem 22 cm^2 , que é maior que a área de um cartão. E no caso de um quadrado 17×17 cabem, no máximo, doze retângulos 7×3 e sobram 37 cm^2 !

- (a) Considerando-se que $13 = 7 + 3 + 3$, em cada lateral do quadrado cabe um retângulo no sentido do comprimento e mais dois no sentido da largura. Pode-se, então, arranjar 8 retângulos em 4 pares, cobrindo $7 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ cada um e sobrando, do quadrado 13×13 , apenas um quadrado 1×1 (veja a figura).



- (b) Observando que $130 = 10 \times 13$, é fácil reproduzir a configuração do item anterior multiplicando todas as medidas por 10, isto é, agrupando 200 retângulos 7×3 (10 no sentido do comprimento por 20 na largura), de modo a formar grandes retângulos com $70 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$, que podem ser dispostos de maneira semelhante à do item anterior. Restará o quadrado central, agora com 10×10 , de onde podem ser recortados, de maneira análoga, quatro retângulos 7×3 , restando ao final apenas um quadrado 4×4 . O total de retângulos obtidos, nesse caso, é $4 \times 200 + 4 = 804$. Como a área restante, de 16 cm^2 , é menor que os 21 cm^2 de cada retângulo, seria impossível obter um número maior de retângulos (Note que $130^2 = 16900 = 804 \times 21 + 16$).

- (c) O número máximo de cartões não pode passar de 201, uma vez que $65^2 = 4225 = 201 \times 21 + 4$.

Tentando a mesma estratégia dos itens anteriores, poderíamos multiplicar por 5 as medidas do item (a), escrevendo $65 = 35 + 30 = 5 \times 7 + 10 \times 3$, de forma que podem ser formados quatro blocos com 50 cartões cada e medindo 35×30 . Encaixando-os como no item (a) resta um quadrado central com 5 cm de lado. Isso daria $4 \times 50 = 200$ cartões e sobraria 25 cm^2 . Como esta sobra é maior que a área de um cartão, podemos tentar outras formas de arranjar os retângulos que aproveitem melhor a área do quadrado maior.

Seguindo a dica dada no enunciado, vamos mostrar que qualquer retângulo da forma $21 \times n$, com $n \geq 12$, pode ser inteiramente coberto por retângulos 7×3 , observando que qualquer n é de uma das formas $3k$, $3k + 1$ ou $3k + 2$. Primeiro, colocando lado a lado k dos cartões, ao longo do lado mais comprido, cobre-se um retângulo $7 \times 3k$. Empilhando três destes blocos, cobre-se um retângulo $21 \times 3k$, $k \geq 1$. Justapondo um desses retângulos a outro retângulo 21×7 é fácil cobrir um retângulo de $21 \times (3k + 7) = 21 \times [3(k + 2) + 1]$, que contempla qualquer n , da forma $3k + 1$, maior que 6. Analogamente, justapondo dois retângulos 21×7 a um retângulo $7 \times 3k$ cobre-se um retângulo de $21 \times (3k + 14) = 21 \times [3(k + 4) + 2]$, em que o lado diferente de 21 pode ser qualquer número da forma $3k + 2$ maior que 12, o que completa a demonstração.

Munidos desse resultado, podemos recortar do quadrado 65×65 um retângulo 21×65 (de onde recortam-se exatamente 65 cartões). Do papel restante, medindo 44×65 , recortamos outra faixa de 44×21 (44 cartões). Resta, então, um quadrado 44×44 , de onde se podem recortar 4 retângulos de 21×23 à maneira do que foi feito no item (a), de onde são obtidos mais 92 cartões e, ao final, restará apenas um quadrado 2×2 . Portanto é possível recortar 201 cartões.

Observações: O resultado, mostrado no item (c), de que qualquer retângulo no formato $21 \times n$ com $n \geq 12$ divide-se de maneira exata em retângulos 7×3 , pode ser visto como uma consequência do teorema de Sylvester (veja o artigo *Semigrupos Numéricos e o Teorema de Sylvester*, do prof. Ronaldo Garcia, veja a página 49), uma vez que 12 é o

regularizador aritmético do semigrupo gerado por 3 e 7.

Este tipo de problema, conhecido como empacotamento de retângulos, tem importantes aplicações em logística, na otimização da distribuição de caixas e contêineres para transporte ou armazenagem ou na diagramação do corte de peças em chapa metálica, por exemplo. Uma ferramenta (applet java) útil para se estudar empacotamentos de retângulos em um retângulo maior pode ser encontrada em <http://lagrange.ime.usp.br/~lobato/packing/run/index.php>, onde se pode entrar com as medidas do retângulo maior ($L \times W$) e dos retângulos menores ($\ell \times w$) e o aplicativo gera empacotamentos máximos seguindo três possíveis algoritmos. Utilizando este applet no caso em que o retângulo maior é um quadrado e os menores são no formato 7×3 , é fácil encontrar valores para o lado do quadrado para os quais a área que sobra do empacotamento não pode ser menor que 21. Alguns exemplos são $L = 8, 17, 23$ ou 25).

Um desafio interessante seria responder, nas condições do problema original da OMEG, ou seja, recortando o maior número possível de retângulos 7×3 de um quadrado de lado inteiro L ,

- (a) o conjunto dos valores de L para os quais a área que sobra do empacotamento não pode ser menor que 21 é finito? Caso seja, qual seria seu máximo?
- (b) Qual é o maior valor possível para a área que sobra depois de otimizar o empacotamento?

Rogério de Queiroz Chaves, Helvecio Pereira de Castro,
Durval José Tonon e Valdivino Vargas Junior

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
rogerio@mat.ufg.br, hpcastro@mat.ufg.br,
djtonon@mat.ufg.br, vvjunior@mat.ufg.br



Sequências Recorrentes¹

CARLOS GUSTAVO MOREIRA

Sequências recorrentes são sequências x_0, x_1, x_2, \dots em que cada termo é determinado por uma dada função dos termos anteriores. Dado um inteiro positivo k , uma *sequência recorrente de ordem k* é uma sequência em que cada termo é determinado como uma função dos k termos anteriores:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \dots, x_{n+1}, x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Com essa generalidade, o estudo geral de sequências recorrentes se confunde em larga medida com a teoria dos Sistemas Dinâmicos, e o comportamento de tais sequências pode ser bastante caótico e de descrição muito difícil, mesmo qualitativamente. Um caso particular muito importante ocorre quando a função f é linear: existem constantes c_1, c_2, \dots, c_n com

$$x_{n+k} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \dots + c_k x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tais sequências são conhecidas como sequências recorrentes lineares, e generalizam simultaneamente as progressões geométricas, aritméticas e os polinômios. Estas sequências serão o objeto principal dessas notas. Não obstante, algumas recorrências não-lineares serão consideradas, como a recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, que tem grande interesse do ponto de vista de sistemas dinâmicos e por suas aplicações à teoria dos números.

Essas notas, adaptadas do texto de um mini-curso dado pelo autor na II Bienal da SBM, são inspiradas no excelente livreto “Sequências

¹Nota dos Editores: Este artigo foi publicado originalmente na Revista da Olimpíada Regional Matemática Santa Catarina, Nº 4, 2007: www.orm.mtm.ufsc.br/revista.php, o autor nos autorizou publicá-lo novamente.

Recorrentes”, de A. Markuchevitch, publicado na coleção “Iniciação na matemática”, da editora MIR, no qual o autor aprendeu bastante sobre o tema no início de sua formação matemática. A seção 4, onde é deduzida a fórmula para o termo geral de uma sequência recorrente linear, é adaptada do artigo “Equações de recorrência”, de Héctor Soza Pollman, publicado no número 9 da revista Eureka! (de fato, o artigo original submetido à revista enunciava esta fórmula sem demonstração, a qual foi incluída no artigo pelo autor destas notas, que é um dos editores da Eureka!).

1.1 Sequências recorrentes lineares

Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência recorrente linear de ordem k (onde k é um inteiro positivo) se existem constantes (digamos reais ou complexas) c_1, c_2, \dots, c_k tais que

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j x_{n+k-j} = c_1 x_{n+k-1} + c_2 x_{n+k-2} + \dots + c_k x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tais sequências são determinadas pelos seus k primeiros termos x_0, x_1, \dots, x_{k-1} .

Os exemplos mais simples (e fundamentais, como veremos a seguir) de sequências recorrentes lineares são as progressões geométricas: se $x_n = a \cdot q^n$ então $x_{n+1} = qx_n, \forall n \in \mathbb{N}$, donde (x_n) é uma sequência recorrente linear de ordem 1.

Se (x_n) é uma progressão aritmética, existe uma constante r tal que $x_{n+1} - x_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$, donde $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, e logo $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, (x_n) é uma sequência recorrente linear de ordem 2.

Se $x_n = P(n)$ onde P é um polinômio de grau k , então (x_n) satisfaz a recorrência linear de ordem $k + 1$ dada por

$$x_{n+k+1} = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k+1}{j+1} x_{n+k-j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Isso é evidente se $k = 0$ (isto é, se P é constante), pois nesse caso (*) se reduz a $x_{n+1} = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, e o caso geral pode ser provado por indução: se P é um polinômio de grau $k \geq 1$ então

$$Q(x) = P(x+1) - P(x) \text{ é um polinômio de grau } k-1,$$

donde $y_n = x_{n+1} - x_n = Q(n)$ satisfaz a recorrência

$$y_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} y_{n+k-1-j}, \forall n \in \mathbb{N},$$

e assim

$$x_{n+k+1} - x_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j+1} (x_{n+k-j} - x_{n+k-j-1}), \forall n \in \mathbb{N},$$

logo

$$\begin{aligned} x_{n+k+1} &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \left(\binom{k}{j+1} + \binom{k}{j} \right) x_{n+k-j} \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k+1}{j+1} x_{n+k-j}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Um outro exemplo é dado por sequências do tipo

$$x_n = (an + b) \cdot q^n, \text{ onde } a, b \text{ e } q \text{ são constantes.}$$

Temos que

$$\begin{aligned} x_{n+1} - qx_n &= (a(n+1) + b)q^{n+1} - q(an + b) \cdot q^n \\ &= q^{n+1}(a(n+1) + b - (an + b)) \\ &= aq^{n+1} \end{aligned}$$

é uma progressão geométrica de razão q , e logo

$$x_{n+2} - qx_{n+1} = q(x_{n+1} - qx_n), \text{ donde } x_{n+2} = 2qx_{n+1} - q^2x_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

e portanto (x_n) é uma sequência recorrente linear de ordem 2.

Vamos agora considerar a famosa e popular sequência de Fibonacci, dada por $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ e $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seus primeiros termos são $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_4 = 3$, $u_5 = 5$, $u_6 = 8$, $u_7 = 13$, $u_8 = 21, \dots$. Mostraremos na próxima seção como achar uma fórmula explícita para seu termo geral u_n em função de n , o que será generalizado para sequências recorrentes lineares quaisquer, e veremos algumas de suas propriedades aritméticas.

Antes porém, concluiremos esta seção com alguns fatos gerais sobre sequências recorrentes lineares, que serão úteis nas seções subsequentes.

O conjunto das sequências que satisfazem uma dada recorrência linear

$$x_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j x_{n+k-j}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

é um *espaço vetorial*, isto é, dadas duas sequências (y_n) e (z_n) que satisfazem esta recorrência (ou seja,

$$y_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j y_{n+k-j} \quad \text{e} \quad z_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j z_{n+k-j}, \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

e uma constante a , a sequência (w_n) dada por $w_n = y_n + az_n$ satisfaz a mesma recorrência: $w_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j w_{n+k-j}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

É bastante usual, dada uma sequência (x_n) , estudar a sequência obtida pela soma de seus n primeiros termos $s_n = \sum_{k \leq n} x_k$. Se (x_n) é uma sequência recorrente linear, (s_n) também é. De fato,

$$s_{n+1} - s_n = \sum_{k \leq n+1} x_k - \sum_{k \leq n} x_k = x_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se $x_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j x_{n+k-j}$, temos

$$s_{n+k+1} - s_{n+k} = \sum_{j=1}^k c_j (s_{n+k+1-j} - s_{n+k-j}), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde

$$\begin{aligned} s_{n+k+1} &= (1 + c_1)s_{n+k} + \sum_{j=1}^{k-1} (c_{j+1} - c_j)s_{n+k-j} - c_k s_n \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} d_i s_{n+k+1-i} \end{aligned}$$

onde $d_1 = 1 + c_1$, $d_i = c_i - c_{i-1}$ para $2 \leq i \leq k$ e $d_{k+1} = -c_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e portanto (s_n) é uma sequência recorrente linear de ordem $k + 1$.

1.2 A sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é definida por $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ e $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Queremos achar uma fórmula explícita para u_n em função de n . Para isso usaremos uma ideia que será bastante útil também no caso geral: procuraremos progressões geométricas que satisfazem a mesma recorrência que (u_n) : se $x_n = a \cdot q^n$ com a e q não nulos satisfaz $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, teremos $a \cdot q^{n+2} = a \cdot q^{n+1} + a \cdot q^n = a \cdot q^n(q + 1)$, donde $q^2 = q + 1$. Temos assim dois valores possíveis para q : as duas raízes da equação $q^2 - q - 1 = 0$, que são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim, sequências da forma $a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e da forma $b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ satisfazem a recorrência acima, bem como sequências da forma

$$y_n = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

pela observação da seção anterior.

Basta agora encontrar valores de a e b tais que $y_0 = 0$ e $y_1 = 1$ para que tenhamos $y_n = u_n$ para todo n (de fato, teríamos $y_0 = u_0$, $y_1 = u_1$ e, por indução se $k \geq 2$ e $y_n = U_n$ para todo $n < k$, temos $y_k = y_{k-1} + y_{k-2} = u_{k-1} + u_{k-2} = u_k$). Para isso, devemos ter:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

e portanto $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Mostramos assim que

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

É curioso que na fórmula do termo geral de uma sequência de números inteiros definida de modo tão simples quanto (u_n) apareçam números irracionais.

Provaremos a seguir uma identidade útil sobre números de Fibonacci:

Proposição: $u_{m+n} = u_m u_{n-1} + u_{m+1} u_n, \forall m, n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$

Prova: Sejam $y_m = u_{m+n}$ e $z_m = u_m u_{n-1} + u_{m+1} u_n$. Temos que (y_n) e (z_n) satisfazem a recorrência $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, $y_0 = u_n, y_1 = u_{n+1}, z_0 = 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_n = u_n = y_0$ e $z_1 = 1 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_n = u_{n+1} = y_1$, e portanto, como antes, $z_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

Podemos usar este fato para provar o seguinte interessante fato aritmético sobre a sequência (u_n) , que pode ser generalizado para as chamadas sequências de Lucas, as quais são úteis para certos testes de primalidade:

Teorema: $\text{mdc}(u_m, u_n) = u_{\text{mdc}(m, n)}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$

Prova: Observemos primeiro que $\text{mdc}(u_n, u_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Isso vale para $n = 0$ pois $u_1 = 1$ e, por indução,

$$\text{mdc}(u_{n+1}, u_{n+2}) = \text{mdc}(u_{n+1}, u_{n+1} + u_n) = \text{mdc}(u_{n+1}, u_n) = 1.$$

Além disso, se $m = 0$,

$$\text{mdc}(u_m, u_n) = \text{mdc}(0, u_n) = u_n = u_{\text{mdc}(m, n)}, \forall n \in \mathbb{N},$$

e se $m = 1$, $\text{mdc}(u_m, u_n) = \text{mdc}(1, u_n) = 1 = u_1 = u_{\text{mdc}(m, n)}, \forall n \in \mathbb{N}$. Vamos então provar o fato acima por indução em m . Suponha que a afirmação do enunciado seja válida para todo $m < k$ (onde $k \geq 2$ é um

inteiro dado) e para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos provar que ela vale para $m = k$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, que $\text{mdc}(u_k, u_n) = u_{\text{mdc}(k,n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, se $n < k$,

$$\text{mdc}(u_k, u_n) = \text{mdc}(u_n, u_k) = u_{\text{mdc}(n,k)} = u_{\text{mdc}(k,n)},$$

por hipótese de indução. Já se $n \geq k$,

$$u_n = u_{(n-k)+k} = u_{n-k}u_{k-1} + u_{n-k+1}u_k,$$

e logo

$$\begin{aligned} \text{mdc}(u_k, u_n) &= \text{mdc}(u_k, u_{n-k}u_{k-1} + u_{n-k+1}u_k) \\ &= \text{mdc}(u_k, u_{n-k}u_{k-1}) \\ &= \text{mdc}(u_k, u_{n-k}) \quad (\text{pois } \text{mdc}(u_k, u_{k-1}) = 1) \\ &= u_{\text{mdc}(k, n-k)} \\ &= u_{\text{mdc}(k, n)}. \end{aligned}$$

■

Corolário: Se $m \geq 1$ e m é um divisor de n então u_m divide u_n . Além disso, se $m \geq 3$ vale a recíproca: se u_m divide u_n então m divide n .

1.3 A recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2$

Consideremos as seqüências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais que satisfazem a recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Suponha que $x_0 = \alpha + \alpha^{-1}$ para um certo α (real ou complexo). Então podemos provar por indução que $x_n = \alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato, se vale a fórmula para x_n , teremos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - 2 = (\alpha^{2^n} + \alpha^{-2^n})^2 - 2 = \alpha^{2^{n+1}} + 2 + \alpha^{-2^{n+1}} - 2 \\ &= \alpha^{2^{n+1}} + \alpha^{-2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Se $|x_0| > 2$, temos $x_0 = \alpha + \alpha^{-1}$ para $\alpha = \frac{x_0 + \sqrt{x_0^2 - 4}}{2} \in \mathbb{R}$.

Se $|x_0| \leq 2$, vale a mesma fórmula para α , mas nesse caso α é um número complexo de módulo 1, e pode ser escrito como

$$\alpha = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Nesse caso,

$$\begin{aligned} x_n &= e^{2^n i \theta} + e^{-2^n i \theta} = (\cos(2^n \theta) + i \operatorname{sen}(2^n \theta)) + (\cos(2^n \theta) - i \operatorname{sen}(2^n \theta)) \\ &= 2 \cos(2^n \theta). \end{aligned}$$

Podemos ver isso de outra forma: se $|x_0| \leq 2$, escrevemos $x_0 = 2 \cos \theta$, com $\theta \in [0, \pi]$. Podemos mostrar então por indução que $x_n = 2 \cos(2^n \theta)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2 = 4 \cos^2(2^n \theta) - 2 = 2(2 \cos^2(2^n \theta) - 1) = 2 \cos(2^{n+1} \theta),$$

pois $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Podemos usar esta expressão para obter diversos tipos de comportamento possível para uma tal sequência (x_n) . Se $x_0 = 2 \cos \theta$ e $\frac{\theta}{\pi}$ é racional e tem representação binária periódica de período m então $(x_n) = (2 \cos(2^n \theta))$ é periódica de período m . Por outro lado, podemos ter $x_0 = 2 \cos \theta$ onde $\frac{\theta}{\pi}$ tem representação binária como

$$0,0100011011000001010011100101110111\dots$$

em que todas as sequências finitas de zeros e uns aparecem em algum lugar (isso acontece para a “maioria” dos valores de θ).

Nesse caso, a sequência $(x_n) = (2 \cos(2^n \theta))$ é *densa* em $[-2, 2]$, isto é, qualquer ponto de $[-2, 2]$ pode ser aproximado por elementos de (x_n) , com erro arbitrariamente pequeno.

No caso em que x_0 é um inteiro, a sequência (x_n) pode ter propriedades aritméticas muito interessantes. Em particular, se $x_0 = 4$ (e logo $x_n = (2 + \sqrt{3})^{2^n} + (2 - \sqrt{3})^{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$) vale o famoso critério de Lucas-Lehmer para testar a primalidade de números de Mersenne: se $n \geq 3$ então $2^n - 1$ é primo se e somente se $2^n - 1$ é um divisor de x_{n-2} (por exemplo, $2^3 - 1 = 7$ é primo e é um divisor de $x_{3-2} = x_1 = x_0^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$).

Exercício: Seja $x_0 \geq 3$ um inteiro ímpar.

- i) Prove que se p é um número primo então existe no máximo um valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que p divide x_n .

ii) Prove que se p é um fator primo de x_n então $p > n$.

Sugestão: Considere a sequência $x_n \pmod{p}$.

Esse exercício pode ser generalizado para outras recorrências. Nesse caso particular da recorrência $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ é possível mostrar um resultado mais forte: se p é um fator primo de x_n então $p \geq 2^{n+2} - 1$ (note que quando $p = 2^q - 1$ é primo, com $q \geq 3$ e $n = q - 2$, vale a igualdade $p = 2^{n+2} - 1$ e $p|x_n$, pelo critério de Lucas-Lehmer enunciado acima).

1.4 Fórmulas gerais para sequências recorrentes lineares

Considere a equação

$$a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_0 x_n = 0, \quad n \geq 0 \quad (2)$$

em que a_0, \dots, a_k são constantes, e os valores de x_i são conhecidos para $i = 0, \dots, k-1$. Supondo que a equação (2) admite uma solução do tipo: $x_n = \lambda^n$, em que λ é um parâmetro, e substituindo em (2) temos

$$a_k \lambda^{n+k} + a_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \cdots + a_0 \lambda^n = 0.$$

Dividindo por λ^n , obtemos a *equação característica* associada a equação (2)

$$a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \cdots + a_0 \lambda^0 = 0.$$

Vamos mostrar que se esta equação tem as raízes complexas $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ com multiplicidades $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$, respectivamente, então as soluções de (2) são exatamente as sequências (x_n) da forma

$$x_n = Q_1(n) \lambda_1^n + Q_2(n) \lambda_2^n + \cdots + Q_r(n) \lambda_r^n,$$

onde Q_1, \dots, Q_r são polinômios com grau(Q_i) $< \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$ (em particular, se λ_i é uma raiz simples então Q_i é constante).

Seja $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_0$ um polinômio.

Definição: Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a propriedade $\text{Rec}(P(x))$ se $a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_0 x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Não é difícil verificar os seguintes fatos:

- i) Se (x_n) e (y_n) satisfazem $\text{Rec}(P(x))$ e $c \in \mathbb{C}$ então $(z_n) = x_n + cy_n$ satisfaz $\text{Rec}(P(x))$.
- ii) Se $Q(x) = b_r x^r + b_{r-1} x^{r-1} + \dots + b_0$ e (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ então (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x)Q(x))$ (isso segue de $\sum_{j=0}^r b_j (a_k x_{n+j+k} + a_{k-1} x_{n+j+k-1} + \dots + a_0 x_{n+j}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$)
- iii) (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ se e só se $(y_n) = (x_n/\lambda^n)$ satisfaz $\text{Rec}(P(\lambda x))$ (substitua $x_{n+j} = \lambda^{n+j} y_{n+j}$ em $\sum_{j=0}^k a_j x_{n+j} = 0$).
- iv) Se $s_n = \sum_{k=0}^n x_k$ então (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ se e só se (s_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)P(x))$ (escreva $x_{n+j+1} = s_{n+j+1} - s_{n+j}$ e substitua em $\sum_{j=0}^n a_j x_{n+j+1} = 0$).

Por iii), para ver que, para todo polinômio $Q(x)$ de grau menor que m , $x_n = Q(n)\lambda^n$ satisfaz $\text{Rec}((x-\lambda)^m)$, basta ver que $(y_n) = (Q(n))$ satisfaz $\text{Rec}((x-1)^m)$, o que faremos por indução. Isso é claro que $m = 1$, e em geral, se $z_n = y_{n+1} - y_n = Q(n+1) - Q(n)$, como $\tilde{Q}(x) = Q(x+1) - Q(x)$ tem grau menor que $m-1$, (z_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)^{m-1})$ (por hipótese de indução), e logo, por (iv), (Y_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)^m)$. Essa observação, combinada com ii) e i), mostra que se

$$P(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2} (x - \lambda_3)^{\alpha_3} \dots (x - \lambda_r)^{\alpha_r},$$

e $\text{grau}(Q_i) < \alpha_i$ para $1 \leq i \leq r$ então $x_n = \sum_{i=1}^r Q_i(n)\lambda_i^n$ satisfaz $\text{Rec}(P(x))$.

Para ver que se (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$ então x_n é da forma acima, usaremos indução novamente.

Supomos $\lambda_1 \neq 0$ e tomamos $y_n = x_n/\lambda_1^n$, $z_n = y_{n+1} - y_n$, para $n \geq 0$.

Por iii) e iv), z_n satisfaz $\text{Rec}(P(\lambda_1 x)/(x-1))$ e, portanto por hipótese de indução, $z_n = \tilde{Q}_1(x) + \tilde{Q}_2(x)(\lambda_2/\lambda_1)^n + \dots + \tilde{Q}_r(x)(\lambda_r/\lambda_1)^n$, onde $\text{grau}(\tilde{Q}_i) < \alpha_i$ para $2 \leq i \leq r$ e $\text{grau}(\tilde{Q}_1) < \alpha_1 - 1$.

Para terminar a prova, vamos mostrar que se existem polinômios P_1, P_2, \dots, P_k tais que

$$y_{n+1} - y_n = P_1(n) + P_2(n)\beta_2^n + \dots + P_k(n)\beta_k^n$$

(onde $1, \beta_2, \dots, \beta_k$ são complexos distintos e $P_i \neq 0, \forall i \geq 2$) então $y_n = \tilde{P}_1(n) + \tilde{P}_2(n)\beta_2^n + \dots + \tilde{P}_k(n)\beta_k^n$, onde $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_k$ são polinômios com grau $P_i = \text{grau } \tilde{P}_i$ para $i \geq 2$ e grau $\tilde{P}_1 = \text{grau } P_1 + 1$, por indução na soma dos graus dos polinômios P_i , onde convencionamos que o grau do polinômio nulo é -1 .

(no nosso caso temos $\beta_i = \lambda_i/\lambda_1$, e como $x_n = \lambda_1^n y_n$ o resultado segue imediatamente).

Para provar essa afirmação observamos inicialmente que, se a soma dos grau de P_i é -1 , então $y_{n+1} - y_n = 0, \forall n$, e logo, y_n é constante. Em geral, consideramos 2 casos:

a) $P_1(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_0, c_m \neq 0$. Nesse caso definimos

$$\tilde{y}_n = y_n - \frac{c_m n^{m+1}}{m+1},$$

e temos $\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n = Q_1(n) + P_2(n)\beta_1^n + \dots + P_k(n)\beta_k^n$, com grau(Q) $< m$. Por hipótese de indução, \tilde{y}_n (e logo y_n) é da forma desejada.

b) $P_2(x) = d_s x^s + d_{s-1} x^{s-1} + \dots + d_0, d_s \neq 0$. Nesse caso, definimos

$$\tilde{y}_n = y_n - \frac{d_s n^s \lambda_2^n}{\lambda_2 - 1},$$

e temos $\tilde{y}_{n+1} - \tilde{y}_n = P_1(n) + Q(n)\beta_2^n + P_3(n)\beta_3^n + \dots + P_k(n)\beta_k^n$, com grau(Q) $< s$. Por hipótese de indução, \tilde{y}_n (e logo y_n) é da forma desejada. ■

Vimos na primeira parte da demonstração acima que (x_n) satisfaz $\text{Rec}(P(x))$, onde $P(x) = (x - \lambda_1)^{\alpha_1} (x - \lambda_2)^{\alpha_2} \dots (x - \lambda_r)^{\alpha_r}$ sempre que $x_n = Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n$, onde Q_1, Q_2, \dots, Q_r são polinômios com $\text{grau}(Q_j) < \alpha_j, \forall j \leq r$. Vamos apresentar um argumento alternativo, motivado por conversas do autor com Bruno Fernandes Cerqueira Leite, para mostrar que todas as seqüências que satisfazem as recorrência são dessa forma.

Cada polinômio $Q_i(n)$ tem α_i coeficientes (dos monômios cujos graus são $0, 1, 2, \dots, \alpha_i - 1$). Como o espaço vetorial das seqüências que satisfazem $\text{Rec}(P(x))$ tem dimensão $\text{grau}(P(x)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i$, basta ver que há unicidade na representação de uma seqüência na forma acima. Para isso, devemos mostrar que, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ são números complexos distintos e Q_1, Q_2, \dots, Q_r são polinômios tais que $Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, então $Q_j \equiv 0, \forall j \leq r$.

Vamos supor por absurdo que não seja assim. Supomos sem perda de generalidade que, para certos s e t com $1 \leq s \leq t \leq r, |\lambda_1| = |\lambda_i| > |\lambda_j|, \forall i \leq t, j > t$, e $\text{grau}(Q_1) = \text{grau}(Q_i) > \text{grau}(Q_j)$, se $i \leq s < j \leq t$. Se os polinômios Q_j não são todos nulos, temos Q_1 não nulo. Seja d o grau de Q_1 . Se $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_j(n)\lambda_j^n}{n^d \lambda_1^n} = 0,$$

e se $|\lambda_i| = |\lambda_1|$ e $\text{grau}(Q) < d$, também temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q(n)\lambda_i^n}{n^d \lambda_1^n} = 0.$$

Portanto, se $Q_1(n)\lambda_1^n + Q_2(n)\lambda_2^n + \dots + Q_r(n)\lambda_r^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e o coeficiente de n^d em Q_i é a_i para $i \leq s$, dividindo por $n^d \lambda_1^n$ e tomando o limite, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^n \right) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \right) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \right) \\
 &= a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \\
 &= a_1 + \sum_{2 \leq i \leq s} a_i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{(\lambda_i/\lambda_1)^{n+1} - (\lambda_i/\lambda_1)}{(\lambda_i/\lambda_1) - 1} \right) = a_1,
 \end{aligned}$$

pois, para $2 \leq i \leq s$, $\lambda_i/\lambda_1 \neq 1$ é um complexo de módulo 1, donde

$$\left| \frac{(\lambda_i/\lambda_1)^{n+1} - (\lambda_i/\lambda_1)}{(\lambda_i/\lambda_1) - 1} \right| \leq \frac{2}{|(\lambda_i/\lambda_1) - 1|},$$

e logo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(\lambda_i/\lambda_1)^{n+1} - (\lambda_i/\lambda_1)}{(\lambda_i/\lambda_1) - 1} \right) = 0.$$

Entretanto, isso é um absurdo, pois $\text{grau}(Q_1) = d$, e logo $a_1 \neq 0$.

Exemplo: $x_n = \text{sen}(n\alpha)$ satisfaz uma recorrência linear. De fato,

$$x_{n+1} = \text{sen}(n\alpha + \alpha) = \text{sen}(n\alpha) \cos \alpha + \cos(n\alpha) \text{sen} \alpha \Rightarrow$$

$$x_{n+2} = \text{sen}(n\alpha + 2\alpha) = \text{sen}(n\alpha) \cos 2\alpha + \cos(n\alpha) \text{sen} 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n+2} - \frac{\text{sen} 2\alpha}{\text{sen} \alpha} x_{n+1} = (\cos 2\alpha - \frac{\text{sen} 2\alpha}{\text{sen} \alpha} \cos \alpha) x_n, \text{ ou seja,}$$

$x_{n+2} = 2 \cos \alpha \cdot x_{n+1} - x_n$. Note que x_n não parece ser da forma geral descrita nesta seção, mas de fato

$$\begin{aligned}
 x_n &= \frac{e^{in\alpha} - e^{-in\alpha}}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{i\alpha})^n - \frac{1}{2i} (e^{-i\alpha})^n \\
 &= \frac{1}{2i} (\cos \alpha + i \text{sen} \alpha)^n - \frac{1}{2i} (\cos \alpha - i \text{sen} \alpha)^n
 \end{aligned}$$

(observe que $\cos \alpha + i \text{sen} \alpha$ e $\cos \alpha - i \text{sen} \alpha$ são as raízes de

$$x^2 - 2 \cos \alpha \cdot x + 1).$$

Observação: Se (x_n) satisfaz $\text{Rec}((x-1)P(x))$, onde

$$P(x) = a_n x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0,$$

então, se definirmos

$$y_n = a_k x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + a_0 x_n,$$

teremos $y_{n+1} = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, y_n é constante. Assim, $a_k x_{n+k} + \dots + a_0 x_n$ é um invariante da sequência x_n , o que é um fato útil para muitos problemas envolvendo recorrência (veja, por exemplo, os Problemas 2 e 3 abaixo).

Vamos agora ver um problema resolvido em que se usam estimativas assintóticas de sequências recorrentes para provar um resultado de teoria dos números:

Problema 1. (Problema 69 da Revista Eureka! n.º. 14) Sejam a e b inteiros positivos tais que $a^n - 1$ divide $b^n - 1$ para todo inteiro positivo n .

Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = a^k$.

Solução de Zoroastro Azambuja Neto (Rio de Janeiro-RJ):

Suponha por absurdo que b não seja uma potência de a .

Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a^k < b < a^{k+1}$. Consideremos a sequência $x_n = \frac{b^n - 1}{a^n - 1} \in \mathbb{N}, \forall n \geq 1$. Como $\frac{1}{a^n - 1} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{2n}} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a^{jn}}$, temos

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^n}{a^{jn}} - \frac{1}{a^n - 1} \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \dots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n + \frac{b^n}{a^{kn}(a^n - 1)} - \frac{1}{a^n - 1}. \end{aligned}$$

Note que como $\frac{b^n}{a^{kn}(a^n - 1)} = \frac{(b/a^{k+1})^n}{1 - a^{-n}}$ e $\frac{1}{a^n - 1}$ tendem a 0 quando n cresce, se definimos

$$y_n = \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{b}{a^2}\right)^n + \dots + \left(\frac{b}{a^k}\right)^n = \sum_{j=1}^k \left(\frac{b}{a^j}\right)^n,$$

temos que

$$x_n - y_n = \frac{b^n}{a^{kn}(a^n - 1)} - \frac{1}{a^n - 1}$$

tende a 0 quando n tende a infinito. Por outro lado, como y_n é uma soma de k progressões geométricas de razões b/a^j , $1 \leq j \leq k$, y_n satisfaz a equação de recorrência $c_0 y_{n+k} + c_1 y_{n+k-1} + \dots + c_k y_n = 0$, $\forall n \geq 0$, onde

$$c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} x + c_k = a^{\frac{k(k+1)}{2}} \left(x - \frac{b}{a}\right) \left(x - \frac{b}{a^2}\right) \dots \left(x - \frac{b}{a^k}\right)$$

Note que todos os c_i são inteiros. Note também que

$$c_0 x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \dots + c_k x_n = c_0 (x_{n+k} - y_{n+k}) + c_1 (x_{n+k-1} - y_{n+k-1}) + \dots + c_k (x_n - y_n)$$

tende a 0 quando n tende a infinito, pois $x_{n+j} - y_{n+j}$ tende a 0 para todo j com $0 \leq j \leq k$ (e k está fixo). Como os c_i e os x_n são todos inteiros, isso mostra que $c_0 x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \dots + c_k x_n = 0$ para todo n grande.

Agora, como

$$x_n = y_n + \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n + \frac{b^n}{a^{(k+1)n}(a^n - 1)} - \frac{1}{a^n - 1},$$

temos

$$c_0 x_{n+k} + c_1 x_{n+k-1} + \dots + c_k x_n = \sum_{j=0}^k c_j \left(\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} + z_{n+k-j} \right),$$

onde

$$z_m = \frac{b^m}{a^{(k+1)m}(a^m - 1)} - \frac{1}{a^m - 1}.$$

Note que

$$\sum_{j=0}^k c_k \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^{n+k-j} = P \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \cdot \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n,$$

onde

$$\begin{aligned} P(x) &= c_0x^k + c_1x^{k-1} + \dots + c_{k-1}x + c_k \\ &= a^{k(k+1)/2} \left(x - \frac{b}{a}\right) \left(x - \frac{b}{a^2}\right) \dots \left(x - \frac{b}{a^k}\right), \end{aligned}$$

donde $P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \neq 0$. Por outro lado, para todo j com $0 \leq j \leq k$,

$$z_{n+k-j} / \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n = \frac{(b/a^{k+1})^{k-j}}{a^{n+k-j} - 1} - \frac{1}{(a^{k-j} - a^{-n})(b/a^k)^n},$$

que tende a 0 quando n tende a infinito, donde

$$w_n = \left(\sum_{j=0}^k c_j x_{n+k-j}\right) / \left(\frac{b}{a^{k+1}}\right)^n$$

tende a $P\left(\frac{b}{a^{k+1}}\right) \neq 0$, o que é um absurdo, pois, como vimos antes, w_n é igual a 0 para todo n grande.

Veremos a seguir dois problemas resolvidos que envolvem sequências recorrentes, que foram propostos na OBM e na IMO, respectivamente:

Problema 2. (Problema 5 da 13^a Olimpíada Brasileira de Matemática - Nível Sênior - 1991) Seja Q_0 o quadrado de vértices $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (0, 1)$ e $P_3 = (0, 0)$. Seja A_0 o interior desse quadrado. Para cada $n \in \mathbb{N}$, P_{n+4} é o ponto médio do segmento $\overline{P_n P_{n+1}}$, Q_n é o quadrilátero de vértices P_n, P_{n+1}, P_{n+2} e P_{n+3} e A_n é o interior de Q_n . Encontre a interseção de todos os A_n .

Solução 1:

Temos $P_{n+4} = \frac{P_n + P_{n+1}}{2}$. Portanto,

$$P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} + 2P_{n+4} = P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3},$$

logo

$$P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3} = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 = (3, 4),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ (note que $2x^4 - x - 1 = (x - 1)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 1)$),
 donde, como A_n é sempre convexo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right) &= \frac{P_n + 2P_{n+1} + 2P_{n+2} + 2P_{n+3}}{7} = \\ &= \frac{3}{7} \left(\frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3}P_{n+1}\right) + \frac{4}{7} \left(\frac{P_{n+2} + P_{n+3}}{2}\right) \end{aligned}$$

sempre pertence ao interior de A_n . Se mostrarmos que o diâmetro (maior distância entre 2 pontos) de A_n tende a 0, teremos mostrado que a interseção de todos os A_n é $\left\{\left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)\right\}$.

Para isso, note que o diâmetro de $ABCD$ é

$$\text{diam}(ABCD) = \max \{\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{CD}\},$$

e

$$P_{n+4} = \frac{P_n + P_{n+1}}{2}, \quad P_{n+5} = \frac{P_{n+1} + P_{n+2}}{2}, \quad P_{n+6} = \frac{P_{n+2} + P_{n+3}}{2}$$

$$P_{n+7} = \frac{P_{n+3} + P_{n+4}}{2} = \frac{2P_{n+3} + P_n + P_{n+1}}{4}$$

e

$$P_{n+8} = \frac{P_{n+4} + P_{n+5}}{2} = \frac{P_n + 2P_{n+1} + P_{n+2}}{4}.$$

Assim,

$$\overline{P_{n+5}P_{n+6}} = |P_{n+6} - P_{n+5}| = \left| \frac{P_{n+3} - P_{n+1}}{2} \right| = \frac{1}{2} \overline{P_{n+1}P_{n+3}},$$

$$\begin{aligned} \overline{P_{n+5}P_{n+7}} &= |P_{n+7} - P_{n+5}| = \frac{2P_{n+3} + P_n - P_{n+1} - 2P_{n+2}}{4} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |P_{n+3} - P_{n+2}| + \frac{1}{4} |P_n - P_{n+1}| = \frac{\overline{P_{n+2}P_{n+3}}}{4} + \frac{\overline{P_nP_{n+1}}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{P_{n+5}P_{n+8}} &= |P_{n+8} - P_{n+5}| = \left| \frac{P_n - P_{n+2}}{4} \right| = \frac{\overline{P_n P_{n+2}}}{4}, \\ \overline{P_{n+6}P_{n+7}} &= |P_{n+7} - P_{n+6}| = \left| \frac{P_n + P_{n+1} - 2P_{n+2}}{4} \right| \leq \\ &\leq \frac{|P_n - P_{n+2}|}{4} + \frac{|P_{n+1} - P_{n+2}|}{4} = \frac{1}{4} \overline{P_n P_{n+2}} + \frac{1}{4} \overline{P_{n+1} P_{n+2}}, \\ \overline{P_{n+6}P_{n+8}} &= |P_{n+8} - P_{n+6}| = \left| \frac{P_n + 2P_{n+1} - P_{n+2} - 2P_{n+3}}{4} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |P_{n+1} - P_{n+3}| + \frac{1}{4} |P_n - P_{n+2}| = \frac{1}{2} \overline{P_{n+1} P_{n+3}} + \frac{1}{4} \overline{P_n P_{n+2}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{P_{n+7}P_{n+8}} &= |P_{n+8} - P_{n+7}| = \left| \frac{P_{n+2} + P_{n+1} - 2P_{n+3}}{4} \right| \leq \\ &\leq \frac{|P_{n+2} - P_{n+3}|}{4} + \frac{|P_{n+1} - P_{n+3}|}{4} = \frac{1}{4} \overline{P_{n+2} P_{n+3}} + \frac{1}{4} \overline{P_{n+1} P_{n+3}}. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{diam}(P_{n+5}P_{n+6}P_{n+7}P_{n+8}) \leq \frac{3}{4} \text{diam}(P_n P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3})$,
 donde

$$\text{diam}(P_{5k}P_{5k+1}P_{5k+2}P_{5k+3}) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \text{diam}(P_0P_1P_2P_3) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k,$$

que tende a 0, o que implica o nosso resultado.

Solução 2:

Podemos escrever $P_n = Q_0 + Q_1\alpha^n + Q_2\beta^n + Q_3\gamma^n$, onde $1, \alpha, \beta$ e γ são as raízes de $x^4 - \left(\frac{x+1}{2}\right) = 0$, ou seja, α, β e γ são raízes de $2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$ (pois $(x-1)(2x^3 + 2x^2 + 2x + 1) = 2x^4 - x - 1$). Temos $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Como $P(0) = 1, P(-1) = -1$ e $P\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ podemos supor que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, logo $\beta\gamma = -1/2\alpha < 1$ e $\beta + \gamma = -1 - \alpha \in (-1, 0)$, donde $(\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma = 1 + 2\alpha + \alpha^2 + \frac{2}{\alpha} < 0$ pois $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ e $|\alpha| < 1 \Rightarrow \alpha^2 < 1$. Assim, $(\beta - \gamma)^2 < 0$, donde β e γ são complexos

conjugados, e $|\beta| = |\gamma| = \sqrt{\beta\gamma} < 1$. Portanto, P_n tende a Q_0 quando n cresce, e logo a interseção de todos os A_n deve ser Q_0 .

Para calcular Q_0 , observe que:

$$\begin{cases} Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 = P_0 \\ Q_0 + Q_1\alpha + Q_2\beta + Q_3\gamma = P_1 \\ Q_0 + Q_1\alpha^2 + Q_2\beta^2 + Q_3\gamma^2 = P_2 \\ Q_1 + Q_1\alpha^3 + Q_2\beta^3 + Q_3\gamma^3 = P_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow 7Q_0 + Q_1(1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + 2\alpha^3) + Q_2(1 + 2\beta + 2\beta^2 + 2\beta^3) + Q_3(1 + 2\gamma + 2\gamma^2 + 2\gamma^3) = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 \Rightarrow 7Q_0 = P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3$
(pois α, β e γ são raízes de $2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$) \Rightarrow

$$Q_0 = \frac{P_0 + 2P_1 + 2P_2 + 2P_3}{7} = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right).$$

Problema 3. (Problema 3 da 41^a Olimpíada Internacional de Matemática, realizada em 2000, na Coreia do Sul) Seja $n \geq 2$ um inteiro. Existem n pulgas numa reta horizontal, nem todas no mesmo ponto. Para um dado número real positivo λ , define-se um *salto* da seguinte maneira:

- Escolhem-se duas pulgas quaisquer nos pontos A e B , com o ponto A à esquerda do ponto B ;
- A pulga que está em A salta até o ponto C da reta, à direita de B , tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$.

Determine todos os valores de λ para os quais, dado qualquer ponto M na reta e quaisquer posições iniciais das n pulgas, existe uma sucessão finita de saltos que levam todas as pulgas para pontos à direita de M .

Solução:

A resposta é: para $\ell \geq \frac{1}{(n-1)}$.

Devemos demonstrar duas afirmações:

- a) que, para $\ell \geq \frac{1}{(n-1)}$, existe uma sequência infinita de movimentos que vai levando as pulgas cada vez mais para a direita, ultrapassando qualquer ponto prefixado M ;
- b) que, para $\ell < \frac{1}{(n-1)}$ e para qualquer posição inicial das pulgas, existe um ponto M tal que as pulgas em um número finito de movimentos jamais alcançam ou ultrapassam M .

Começaremos pelo item b). Sejam x_1, x_2, \dots, x_n as posições iniciais das pulgas, com $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, de tal forma que x_n é a posição da pulga mais à direita. Seja

$$P = \left(\frac{1}{1 - (n-1)\ell} \right) \cdot (x_n - \ell \cdot x_1 - \ell \cdot x_2 - \dots - \ell \cdot x_{n-1}).$$

O ponto P claramente está à direita de todas as pulgas.

Afirmamos que, se após alguns movimentos as novas posições são x'_1, \dots, x'_n e definimos

$$P' = \left(\frac{1}{1 - (n-1)\ell} \right) \cdot (x'_n - \ell \cdot x'_1 - \ell \cdot x'_2 - \dots - \ell \cdot x'_{n-1}),$$

então $P' \leq P$, o que conclui a demonstração, pois isso mostra que as pulgas nunca passarão do ponto P .

Para provar esta afirmação, basta considerar o que ocorre após um movimento.

Se a pulga que estava em x_i pula sobre a pulga que estava em x_n então $x'_n - x_n = \ell \cdot (x_n - x_i)$ e $x'_n - \ell \cdot x_n = x_n - \ell \cdot x_i$ e $P' = P$.

Vamos ver que qualquer outro caso é ainda mais favorável. Suponhamos que a pulga que estava em x_i pula sobre a pulga que estava em x_j . Se a pulga que pulou continua atrás de x_n , temos $x'_n = x_n$ e $x'_1 + \dots + x'_{n-1} > x_1 + \dots + x_{n-1}$, donde $P' < P$. Se ela passa de x_n , teremos $x'_n = x_j + \ell(x_j - x_i) \Rightarrow x'_n - \ell x_n < x'_n - \ell x_j = x_j - \ell x_i < x_n - \ell x_i$, donde novamente temos $P' < P$.

Vamos agora ao item a): Seja $P = x_n - \ell(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$ se, em cada movimento, a pulga mais à esquerda pula sobre a pulga mais à direita, temos $x'_n = x_n + \ell(x_n - x_1) \Rightarrow x'_n - \ell x_n = x_n - \ell x_1$. Assim,

se as novas posições são $x'_1 = x_2, \dots, x'_{n-1} = x_n$ e x'_n , e $P' = x'_n - \ell(x'_1 + x'_2 + \dots + x'_{n-1})$, temos $P' = P$, donde P é uma constante. Podemos supor sem perda de generalidade que P é positivo (escolhendo a origem, por exemplo, em $\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$; note que então teremos sempre $\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq 0$). Temos então

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j) = x_n - \frac{(x_1 + \dots + x_{n-1})}{n-1} \geq x_n - \ell(x_1 + \dots + x_{n-1}) = P$$

$$\Rightarrow x_n - x_1 \geq \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (x_n - x_j) \geq P \Rightarrow x'_n - x_n = \ell(x_n - x_1) \geq \frac{P}{n-1},$$

donde o ponto mais à direita caminha pelo menos $\frac{P}{n-1}$ para a direita a cada passo, logo tende a infinito. Como o ponto mais a direita após $n - 1$ passos será o ponto mais à esquerda, todos os pontos tendem a infinito (para a direita).

Nota: Na estratégia descrita na solução do item a), o ponto mais à esquerda se torna sempre o mais à direita, donde podemos definir

$$x_{n+1} = x'_n = x_n + \ell(x_n - x_1),$$

e teríamos simplesmente $x'_j = x_{j+1}, \forall j$. Reduzimos então a análise dessa estratégia ao estudo da recorrência linear

$$x_{n+1} = (1 + \ell)x_n - \ell x_1,$$

cujo polinômio característico é $P(x) = x^{n+1} - (1 + \ell)x^n + \ell$, do qual 1 é raiz, donde, como $\frac{P(x)}{x-1} = x^n - \ell(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$, a expressão $y_m = x_m - \ell(x_{m-1} + x_{m-2} + \dots + x_{m-n+1} + x_{m-n})$ é um invariante da recorrência, isto é, $y_{m+1} = y_m \forall m$, donde y_m é constante. Daí vem nossa fórmula para P .

Concluimos com o problema a seguir, que é uma interessante aplicação de seqüências recorrentes à trigonometria.

Problema 4. Prove que os ângulos agudos de um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 são irracionais quando expressos em graus (i.e., são múltiplos irracionais de π).

Solução:

Considere a sequência $x_n = \frac{(2+i)^n - (2-i)^n}{2i}$. Temos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e, como $2 + i$ e $2 - i$ são raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$, (x_n) satisfaz a recorrência $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 5x_n$. Daí segue que x_{n+2} é congruente a $-x_{n+1}$ módulo 5 para todo $n \geq 1$, donde x_n é congruente a $(-1)^{n+1}$ para todo $n \geq 1$, e logo x_n não é múltiplo de 5 para nenhum $n \geq 1$. Em particular, $x_n \neq 0$, para todo $n \geq 1$. Assim, $1 \neq \frac{(2+i)^n}{(2-i)^n} = \left(\frac{2+i}{2-i}\right)^n = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^n$, para todo $n \geq 1$. Se $\theta = \cos^{-1}(3/5)$, $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i = e^{i\theta}$, donde $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)^n = e^{in\theta} \neq 1$, para todo $n \geq 1$, o que implica que θ/π é irracional (de fato, se $\theta/\pi = p/q$, teríamos $e^{2iq\theta} = e^{2ip\pi} = 1$).

Nota: Para uma versão mais geral deste problema, veja o Problema 88 proposto na Eureka! 17, p. 60 por Carlos Gustavo Moreira e José Paulo Carneiro, e a solução de seus autores publicada na Eureka! 20, pp. 52-53.

Autor: Carlos Gustavo Moreira

Endereço: IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro - RJ, Brasil
gugu@impa.br



Semigrupos Numéricos e o Teorema de Sylvester

RONALDO GARCIA

Resumo. Neste trabalho são analisadas as propriedades básicas dos semigrupos de \mathbb{N} com dois ou mais geradores. Em particular, apresentamos uma demonstração do teorema de Sylvester, [8], [9]. A estrutura dos semigrupos com três ou mais gerados é tema atual de investigação.

1.1 Introdução

Acostumados com as estruturas algébricas de grupos, anéis, corpos, etc., poderíamos indagar o que um semigrupo numérico teria de interesse.

O objetivo deste trabalho será introduzir os conceitos básicos dos semigrupos de \mathbb{N} e esperamos convencer ao leitor da importância e relevância desta estrutura algébrica elementar e sutil, acessível a estudantes do ensino médio e professores do ensino básico.

Nos textos didáticos tradicionais de álgebra pouco enfoque é dado a análise da estrutura dos semigrupos. Veja [6, pág. 06] para um breve comentário sobre monóides (semigrupos) e o exemplo desta estrutura no conjunto dos homeomorfismos das superfícies compactas. Em resumo, a soma conexa de superfícies possui a estrutura de um semigrupo e a esfera \mathbb{S}^2 é o elemento neutro (zero). Veja Fig. 1.1.

Um subconjunto \mathcal{S} de $\mathbb{N} \cup \{0\}$ é chamado de *semigrupo* se $0 \in \mathcal{S}$ e $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x + y \in \mathcal{S}$.

Estamos interessados nos semigrupos intermediários \mathcal{S} tais que $\{0\} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$.

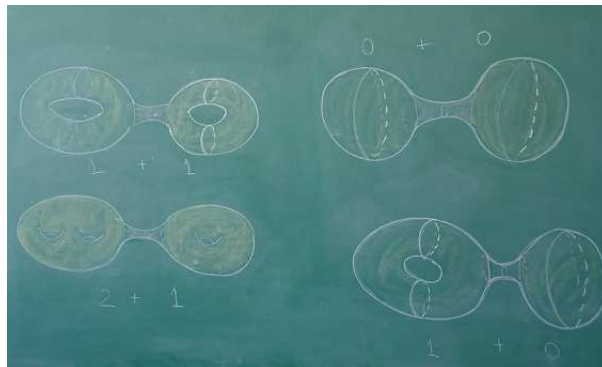


Figura 1.1: Soma conexa de superfícies

Dizemos que um semigrupo \mathcal{S} é de razão r se existe $a_0 \in \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S} \cap \{a_0, a_0 + r, a_0 + 2r, \dots\} = \{a_0, a_0 + r, a_0 + 2r, \dots\}$. Em outras palavras, o semigrupo coincide com uma progressão aritmética

$$P(a_0, r) = \{a_0, a_0 + r, a_0 + 2r, \dots\}$$

de razão $r > 0$ a partir de a_0 .

O menor dos elementos $a_0 \in \mathcal{S}$ que cumprir esta propriedade será chamado de *regularizador aritmético* do semigrupo \mathcal{S} e será denotado por $r(\mathcal{S})$.

O maior elemento do conjunto $\mathcal{F} = \mathbb{N} \setminus \mathcal{S}$, se existir, será denotado por $F(\mathcal{S})$.

Se a progressão aritmética tem razão 1 dizemos também que \mathcal{S} é um semigrupo *aritmético* ou numérico.

Neste caso $\mathbb{N} \setminus \mathcal{S}$ é um conjunto finito e $r(\mathcal{S}) = F(\mathcal{S}) + 1$.

Diremos que $F(\mathcal{S})$ é o *número de Frobenius* de um semigrupo aritmético.

Sejam a e b números naturais e defina

$$\mathcal{S}(a, b) = \{ma + nb, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

o semigrupo gerado por a e b . Sempre iremos supor a e b maiores do que 1, do contrário teríamos $\mathcal{S}(a, b) = \mathbb{N}$.

Observação 1. *Na literatura os números $F(\mathcal{S})$ e $F(\mathcal{S}) + 1$ são conhecidos como números de Frobenius. Não existe uma uniformidade de conceituação. Veja [3] e [4].*

Teorema 1 (Sylvester). *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Então $\mathcal{S}(a, b)$ é um semigrupo aritmético e o maior elemento de $\mathcal{F}(a, b) = \mathbb{N} \setminus \mathcal{S}(a, b)$ é o número ímpar*

$$F(a, b) = ab - (a + b) = (a - 1)(b - 1) - 1.$$

O Teorema 1 é atribuído a J. Sylvester (1814-1897), matemático inglês que fez contribuições em teoria dos números e teoria de invariantes. Veja [8], [9]. Na seção 1.2 iremos apresentar uma demonstração elementar deste teorema baseada em conhecimentos de Geometria Analítica e Teoria Elementar de Equações Diofantinas.

O próximo resultado estabelece que um semigrupo gerado por dois números a e b com máximo divisor comum igual a 2 é uma progressão aritmética de razão 2 a partir do número $r(\mathcal{S}(a, b)) = \frac{1}{2}(a - 2)(b - 2)$.

Teorema 2. *Sejam a e b números naturais tais que $\text{mdc}(a, b) = 2$. Então $\mathcal{S}(a, b)$ é um semigrupo de razão 2 e o seu regularizador aritmético é o número par*

$$r(\mathcal{S}(a, b)) = \frac{1}{2}ab - (a + b) - 2 = \frac{1}{2}(a - 2)(b - 2).$$

Em virtude dos Teoremas 1 e 2 é natural esperar uma generalização para semigrupos $\mathcal{S}(a, b)$ com $\text{mdc}(a, b) = k$, $k \geq 3$.

De fato temos a seguinte extensão natural.

Teorema 3. *Sejam a e b números naturais tais que $\text{mdc}(a, b) = k$, $k \geq 3$. Então $\mathcal{S}(a, b)$ é um semigrupo de razão k e o seu regularizador aritmético é dado por*

$$r(\mathcal{S}(a, b)) = \frac{1}{k}(a - k)(b - k).$$

1.2 Demonstração do Teorema de Sylvester

Sejam a e b números inteiros positivos tais que o máximo divisor comum, $\text{mdc}(a, b) = 1$, seja igual a 1, isto é, as progressões aritméticas

$$P(a) = \{0, a, 2a, \dots, ma, \dots\} = a\mathbb{N}$$

e

$$P(b) = \{0, b, 2b, 3b, \dots, nb, \dots\} = b\mathbb{N}$$

possuem elementos que diferem de uma unidade inteira.

Portanto existem inteiros positivos $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $|ma - nb| = 1$. Assim a equação linear diofantina $ax + by = 1$ possui infinitas soluções inteiras. Se (x_0, y_0) for uma solução particular todas as demais soluções inteiras são parametrizadas por $x(n) = x_0 + bn, y(n) = y_0 - an, n \in \mathbb{Z}$. Quando uma solução (x_0, y_0) da equação $ax + by = 1$ pertence ao primeiro quadrante do plano xy , isto é, $x_0 \geq 0$ e $y_0 \geq 0$, dizemos que a solução é não negativa. Se $x_0 y_0 > 0$ dizemos que a solução é positiva.

Lema 1. *Seja $\text{mdc}(a, b) = 1$. Então a equação diofantina $ax + by = ab + r$ possui soluções inteiras positivas para todo $r \in \mathbb{N}$ e somente as soluções não negativas $(0, a)$ e $(b, 0)$ para $r = 0$*

Demonstração. Inicialmente mostramos que o lema é verdadeiro para $r = 0$. A equação $ax + by = ab$ possui soluções particulares $(b, 0)$ e $(0, a)$. As demais soluções são dadas por $x(n) = bn, y(n) = a - an, n \in \mathbb{Z}$ e nenhuma delas pertence ao primeiro quadrante.

A seguir para demonstrar o lema para $r \geq 1$ tomamos uma solução inteira da equação diofantina $ax_0 + by_0 = 1$ com $x_0 < 0$ e $y_0 > 0$. Consideramos a reta que liga os pontos $(0, 0)$ e (x_0, y_0) . A interseção desta reta com a reta $ax + by = ab + r$ é uma solução inteira da equação

$ax + by = ab + r$. De fato este ponto de interseção é exatamente o ponto $(x_1, y_1) = (x_0(ab + r), y_0(ab + r))$.

Assim as soluções inteiras da equação $ax + by = ab + r$ são dadas por:

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + b(n - 1) \\ y_n &= y_1 - an, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} x_n &= x_0(ab + r) + bn \\ y_n &= y_0(ab + r) - a(n - 1), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

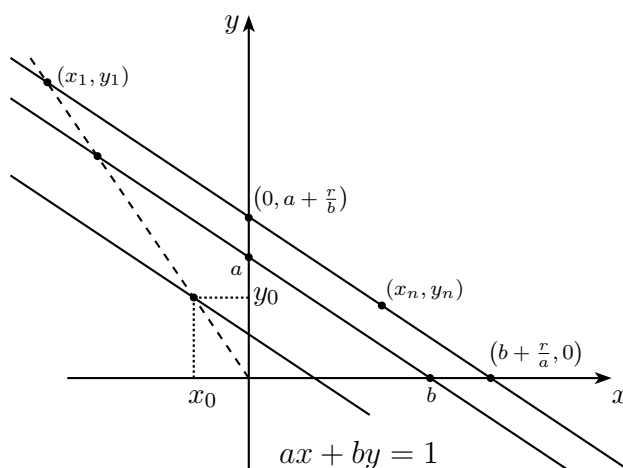


Figura 1.2: Solução gráfica de uma equação diofantina linear

Como a velocidade da reta acima é $\sqrt{a^2 + b^2}$ segue que a sequência de pontos (x_n, y_n) deverá visitar o segmento de reta definido pelos pontos extremais $(0, \frac{ab+r}{b})$ e $(\frac{ab+r}{a}, 0)$ que tem comprimento maior que $\sqrt{a^2 + b^2}$, portanto a equação diofantina $ax + by = ab + r$ sempre possui solução inteira positiva para todo $r \geq 1$. Veja Fig. 1.2. ■

Lema 2. *Seja $\text{mdc}(a, b) = 1$. Então a equação diofantina $ax + by = k$ possui soluções inteiras não negativas para todo $k \geq ab - (a + b) + 1 = (a - 1)(b - 1)$ e $ab - a - b \notin \mathcal{S}(a, b)$.*

Demonstração. Pelo lema 1 a equação $ax + by = ab$ possui soluções inteiras positivas $(b, 0)$ e $(0, a)$ e a equação $ax + by = ab + 1$ possui solução inteira (x_1, y_1) com $x_1 > 0$ e $y_1 > 0$. Portanto

$$a(x_1 - 1) + b(y_1 - 1) = ab - (a + b) + 1 = (a - 1)(b - 1) \in \mathcal{S}(a, b).$$

Analogamente se (x_r, y_r) com $x_r > 0, y_r > 0$ é solução inteira positiva de $ax + by = ab + r, r > 1$, temos que $(x_r - 1, y_r - 1)$ é inteira solução positiva da equação $ax + by = ab - (a + b) + r$. A equação $ax + by = ab - a - b$ não possui soluções inteiras não negativas. De fato seja (\bar{x}, \bar{y}) uma solução com $\bar{x} \geq 0$ e $\bar{y} \geq 0$ e tal que $a\bar{x} + b\bar{y} = ab - a - b$. Logo $(\bar{x} + 1, \bar{y} + 1)$ é uma solução positiva da equação $ax + by = ab$ pois

$$a(\bar{x} + 1) + b(\bar{y} + 1) = a\bar{x} + b\bar{y} + a + b = ab - a - b + a + b = ab.$$

Isto é uma contradição com o fato de que as únicas soluções inteiras não negativas de $ax + by = ab$ serem $(b, 0)$ e $(0, a)$. ■

Lema 3. *Seja $\text{mdc}(a, b) = 1$. Dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $ab > k \geq (a - 1)(b - 1)$ a equação diofantina $ax + by = k$ possui uma única solução inteira não negativa.*

Demonstração. Pelo lema 2 sempre temos soluções nas condições do enunciado. Devemos portanto estabelecer a unicidade. Primeiro demonstraremos que a equação diofantina $ax + by = ab - 1$ possui uma

única solução inteira positiva. Lembramos que a equação $ax + by = ab$ possui somente as soluções inteiras $(b, 0)$ e $(0, a)$ não negativas. Considere o segmento com vértices $A_1 = (\frac{ab-1}{a}, 0)$ e $A_2 = (0, \frac{ab-1}{b})$. O seu comprimento é $(1 - \frac{1}{ab})\sqrt{a^2 + b^2} < \sqrt{a^2 + b^2}$. As soluções inteiras da equação $ax + by = ab - 1$ são da forma $x_n = x_0 + bn$, $y_n = y_0 - an$ onde (x_0, y_0) é uma solução particular a qual podemos supor pertencente ao segundo quadrante. Logo a sequência $p_n = (x_n, y_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ visita o interior relativo do segmento com vértices A_1 e A_2 uma única vez. Veja Fig. 1.3. Para os demais valores de k a argumentação é análoga, mas não podemos sempre garantir que a solução seja positiva.

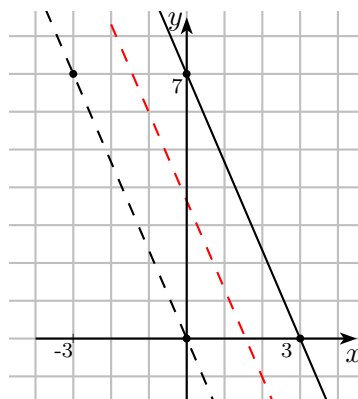


Figura 1.3: Equação diofantina linear $7x + 3y = k$

■

Lema 4. *Seja $\text{mdc}(a, b) = 1$. O número $ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1)$ é exatamente o dobro do número de pares ordenados inteiros (m, n) contidos no interior do triângulo retângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, a)$ e $(b, 0)$.*

Demonstração. Segue diretamente do teorema de Pick. Com efeito, o teorema de Pick relaciona a área de uma poligonal fechada \mathcal{P} tendo vértices com ambas coordenadas inteiras com o número de pares ordenados inteiros contidos no interior de \mathcal{P} e na sua fronteira. Precisamente, $A(\mathcal{P}) = I + B/2 - 1$, onde I é o número de pares (x_i, y_i) inteiros contidos no interior de \mathcal{P} e B é o número de pares ordenados inteiros contidos na fronteira de \mathcal{P} incluindo os vértices.

No caso do triângulo de vértices $(0, 0)$, $(0, a)$ e $(b, 0)$ temos $A(\mathcal{P}) = \frac{ab}{2}$ e $B = a + 1 + b$. Observamos que no interior relativo do segmento com pontos extremais $(0, a)$ e $(b, 0)$ não temos pares ordenados inteiros pois $\text{mdc}(a, b) = 1$. Logo

$$I = \frac{ab}{2} - \frac{a + b + 1}{2} + 1 = \frac{ab - a - b + 1}{2} = \frac{(a - 1)(b - 1)}{2}.$$

■

Assim concluímos a demonstração do Teorema 1 a partir dos lemas anteriores. Pelo lema 2 temos que $F(a, b) = ab - a - b$ é o maior elemento de $\mathbb{N} \setminus \mathcal{S}(a, b) = \mathcal{F}(a, b)$. Logo o semigrupo $\mathcal{S}(a, b)$ é aritmético. Pelo lema 4 temos que $(a - 1)(b - 1)$ é par, portanto $F(a, b) = (a - 1)(b - 1) - 1$ é ímpar.

1.2.1 Demonstração do Teorema 2

A seguir usaremos um argumento heurístico para calcular o candidato para o número $r = r(\mathcal{S}(a, b))$.

Observamos que a mesma estratégia poderia ter sido usada na demonstração do Teorema 1.

Motivado pelo Teorema 1 suponhamos uma fórmula da seguinte forma polinomial simétrica nas variáveis (a, b) :

$$r(\mathcal{S}(a, b)) = x(a + b)^2 + yab + z(a + b) + w, \quad (x, y, z, w) \in \mathbb{Q}^4.$$

Assim, fazendo 4 exemplos, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} r(2, 4) &= 36x + 8y + 6z + w = 0, \\ r(4, 10) &= 196x + 40y + 14z + w = 8, \\ r(6, 8) &= 196x + 48y + 14z + w = 12, \\ r(4, 14) &= 324x + 56y + 18z + w = 12. \end{aligned}$$

O sistema acima possui a única solução $(x, y, z, w) = (0, \frac{1}{2}, -1, 2)$.

Logo a fórmula polinomial procurada, se existir, é

$$r(\mathcal{S}(a, b)) = \frac{1}{2}ab - (a + b) + 2 = \frac{1}{2}(a - 2)(b - 2).$$

Lema 5. *Sejam a e b inteiros positivos tais que $\text{mdc}(a, b) = 2$. Então*

$$r(\mathcal{S}(a, b)) = \frac{1}{2}(a - 2)(b - 2).$$

Demonstração. Sejam a_1 e b_1 tais que $\text{mdc}(a_1, b_1) = 1$ e $a = 2a_1$, $b = 2b_1$. Temos que $\mathcal{S}(a, b) \subset \mathcal{S}(a_1, b_1)$ e $r(\mathcal{S}(a, b)) = 2r(\mathcal{S}(a_1, b_1))$.

De fato, pela estrutura do semigrupo $\mathcal{S}(a_1, b_1)$ sabemos pelo Teorema 1 que $r(\mathcal{S}(a_1, b_1))$ é um número par e $r(\mathcal{S}(a, b)) \leq 2r(\mathcal{S}(a_1, b_1))$. Também temos que $2F(a_1, b_1) \notin \mathcal{S}(a, b)$, onde $F(a_1, b_1)$ é o número de Frobenius do semigrupo $\mathcal{S}(a_1, b_1)$. Logo $2F(a_1, b_1) + 1 \notin \mathcal{S}(a, b)$, portanto $r(\mathcal{S}(a, b)) = 2r(\mathcal{S}(a_1, b_1))$. ■

Finalizamos a demonstração do Teorema 2 observando que de acordo com o Lema 5 o número

$$r(\mathcal{S}(a, b)) = \frac{1}{2}(a-2)(b-2) = \frac{1}{2}(2a_1-2)(2b_1-2) = 2(a_1-1)(b_1-1)$$

é par.

1.2.2 Demonstração do Teorema 3

Sejam a_1 e b_1 tais que $\text{mdc}(a_1, b_1) = 1$ e $a = ka_1$, $b = kb_1$.

Temos que

$$\mathcal{S}(a, b) \subset \mathcal{S}(a_1, b_1) \quad \text{e} \quad r(\mathcal{S}(a, b)) = kr(\mathcal{S}(a_1, b_1)).$$

De fato, pela estrutura do semigrupo $\mathcal{S}(a_1, b_1)$ sabemos pelo Teorema 1 que $r(\mathcal{S}(a_1, b_1))$ é um número par e $r(\mathcal{S}(a, b)) \leq kr(\mathcal{S}(a_1, b_1))$. Também temos que $kF(a_1, b_1) \notin \mathcal{S}(a, b)$. Logo $kF(a_1, b_1) + r \notin \mathcal{S}(a, b)$ para todo $1 \leq r < k$ e $kF(a_1, b_1) + k = k(F(a_1, b_1) + 1) \in \mathcal{S}(a, b)$. Portanto

$$r(\mathcal{S}(a, b)) = kr(\mathcal{S}(a_1, b_1)) = \frac{1}{k}(a-k)(b-k).$$

1.3 Estrutura dos semigrupos gerados por 2 elementos

Nesta seção iremos descrever a estrutura do semigrupo $\mathcal{S}(a, b)$ quando $\text{mdc}(a, b) = 1$

Dado um semigrupo aritmético \mathcal{S} , dizemos que um inteiro $m \in \{0, \dots, r(\mathcal{S})-1\}$ é do tipo (+) se $m \in \mathcal{S}$ e é do tipo (-) se $m \in \mathcal{F} = \mathbb{N} \setminus \mathcal{S}$.

Por exemplo, se $\mathcal{S} = \mathcal{S}(a, b)$ todos os elementos das progressões aritméticas $P(a)$ e $P(b)$ contidos no conjunto $\{0, \dots, r(\mathcal{S}(a, b)) - 1\}$ são do tipo (+) e $F(a, b)$ é do tipo (-).

Dois inteiros positivos m e n são chamados conjugados se

$$m + n = r(\mathcal{S}) - 1.$$

Portanto, se m e $n = \bar{m}$ são conjugados e m é do tipo (+) então $n = \bar{m}$ é do tipo (-), caso contrário teríamos $m + \bar{m} = r(\mathcal{S}) - 1 \in \mathcal{S}$.

Assim podemos concluir as seguintes inequações sobre cardinalidade:

$$\#\{x : x \text{ é do tipo (+)}\} \leq \frac{r(\mathcal{S})}{2} \quad \text{e} \quad \#\{x : x \text{ é do tipo (-)}\} \geq \frac{r(\mathcal{S})}{2}.$$

Lema 6. *Sejam a e b inteiros tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Na região triangular $R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, ax + by \leq F(a, b)\}$ temos exatamente $(a - 1)(b - 1)/2$ pontos com ambas coordenadas inteiras.*

Demonstração. Observamos que $(-1, a - 1)$ e $(b - 1, -1)$ são soluções inteiras da equação diofantina $ax + by = ab - a - b = F(a, b)$.

Os pontos com coordenadas inteiras no interior do triângulo retângulo com vértices $(-1, a - 1)$, $(b - 1, -1)$ e $(-1, -1)$ possuem sempre coordenadas não negativas. Logo, pelo teorema de Pick, a quantidade I destes pontos é dado pela equação

$$\frac{ab}{2} = I + \frac{a + b + 1}{2} - 1.$$

$$\text{Logo temos } I = \frac{(a - 1)(b - 1)}{2}. \quad \blacksquare$$

Proposição 1. *Sejam a e b inteiros tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$. Então, x é do tipo (+) se, e somente se, o seu conjugado \bar{x} é do tipo (-). Portanto temos,*

$$\#\{x : x \text{ é do tipo (+)}\} = \#\{x : x \text{ é do tipo (-)}\} = \frac{1}{2}r(\mathcal{S}(a, b)).$$

Demonstração. Para demonstrar a proposição observamos que de acordo com o lema 6 na região triangular

$$R = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, ax + by \leq F(a, b)\}$$

temos exatamente $(a-1)(b-1)/2$ pontos com ambas coordenadas inteiras. Os pontos de $(m, n) \in \mathbb{R} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ dão origem aos números $am + bn \in \mathcal{S}(a, b)$ que pertencem ao conjunto $\{0, a, b, \dots, F(a, b)\}$.

Portanto, no caso de dois geradores a e b com $\text{mdc}(a, b) = 1$ não existe inteiro x tal que x e \bar{x} sejam ambos do tipo $(-)$. Isto demonstra a proposição. ■

Corolário 1. *Sejam a e b inteiros tais que $a < b$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$. Os números $F(a, b) - k$, $1 \leq k \leq a - 1$ são do tipo $(+)$.*

Demonstração. Os números do conjunto $\{1, 2, \dots, a - 1\}$ são do tipo $(-)$. Logo pela proposição 1 os números $F(a, b) - k$, $1 \leq k \leq a - 1$, são do tipo $(+)$. ■

1.4 Recíproca do Teorema de Sylvester

Formularemos a seguinte recíproca do Teorema de Sylvester.

Dado um número par r determinar todos os pares de inteiros positivos (a, b) tais que $\text{mdc}(a, b) = 1$ e $F(a, b) + 1 = ab - (a + b) + 1 = r$, isto é, determinar todos os semigrupos com dois geradores tendo o número $r - 1$ como seu número de Frobenius.

Construímos a seguinte tabela para dar uma ideia do problema.

$r = F(a, b) + 1$	$(a, b) : \text{mdc}(a, b) = 1$
2	(2,3)
4	(2,5)
6	(2,7), (3,4)
8	(2,9), (3,5)
10	(2,11)
12	(2,13), (3,7), (4,5)
14	(2,15), (3,8),
16	(2,17)
18	(2,19), (3,10), (4,7)
20	(2,21), (3,11), (5,6)
22	(2,23)
24	(2,25), (3,13), (4,9), (5,7)
...	...
30	(2,32), (3,16), (4,11), (6,7)
...	...
50	(2,51), (3,26), (6,11)

Tabela 1.1: Semigrupos com 2 geradores e com regularizador aritmético dado, formando progressão aritmética de razão 1.

Dado um número par r determinar todos os pares (a, b) tais que $0 < a < b$, $\text{mdc}(a, b) = 2$ e $r(a, b) = (a - 2)(b - 2)/2 = r$, isto é, construir todos semigrupos que terminam numa progressão aritmética de razão 2.

Lema 7. *Considere um número primo $p > 2$.*

i) Dado $r = 2p$, então sempre existe o semigrupo gerado por $(2, 2p + 1)$ com número de Frobenius $2p - 1$.

ii) Se $r = 2p$ e 3 divide $p + 1$ então o único semigrupo com número de Frobenius $2p - 1$ é gerado por $(2, 2p + 1)$.

Demonstração. Segue diretamente das propriedades de fatoração de números inteiros. ■

$r = (a - 2)(b - 2)/2$	$(a, b) : \text{mdc}(a, b) = 2$
0	(2,4)
2	\emptyset
4	(4,6)
6	\emptyset
10	\emptyset
12	(4,14), (6,8)
14	\emptyset
16	(6,10)
18	\emptyset
20	(4,22)
22	\emptyset
24	(4,26), (6,14), (8,10)
...	...
50	\emptyset
...	...
100	(4,102)

Tabela 1.2: Semigrupos com 2 geradores e com regularizador aritmético dado, formando uma progressão aritmética de razão 2.

Dado a equação diofantina linear

$$ax + by = m, \quad \text{mdc}(a, b) = 1 \tag{1.1}$$

definimos $d(m; a, b)$ como sendo o número de soluções inteiras não negativas (x, y) da equação (1.1).

Exemplo 4. Consideramos as equações diofantinas $3x + 5y = m$ e $5x + 2y + 3z = m$. Temos que $d(7; 3, 5) = 0$, $d(120; 3, 5) = 9$, $d(150; 3, 5) = 11$. $d(50; 2, 3, 5) = 51$, $d(60; 2, 3, 5) = 71$.

Proposição 2. Seja $\varphi(z) = \frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)}$. Então $d(m; a, b) = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0)$. Em particular $F(a, b)$ é o maior inteiro m tal que $\varphi^{(m)}(0) = 0$.

Também $d(m; a, b) \approx \frac{m}{ab}$, quando $m \rightarrow \infty$.

Demonstração. Para $|z| < 1$ a progressão geométrica z^k tem soma igual

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Logo,

$$\varphi(z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{ak}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} z^{b\ell}\right) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} z^{ak+b\ell} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m,$$

onde c_m é o número de soluções não negativas da equação $ak + b\ell = m$.

Na série convergente $\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m$ temos que $c_m = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0)$.

Para o cálculo da estimativa assintótica observamos que a função racional φ tem seus polos localizados na raízes da unidade de z^a e z^b . O polo de maior ordem é o de ordem dois localizado em $z = 1$. Portanto

$$\varphi(z) = \frac{c}{(1-z)^2} + O\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Temos que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n.$$

Também $\frac{1}{c} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(1-z)^2}{(1-z^a)(1-z^b)} = ab$.

Portanto $d(m; a, b) \approx \frac{m+1}{ab} \approx \frac{m}{ab}$. ■

Observação 2. *Esta técnica de funções geradoras para estimar número de soluções de equações diofantinas remonta a Euler e é uma ferramenta matemática poderosa e útil. Veja [4, cap. 4] para o tratamento do problema em n variáveis $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = m$ e o cálculo estimado de $d(m; a_1, a_2, \dots, a_n)$. No caso específico da proposição 2 o cálculo de $\frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0)$ para valores grandes de m é em geral difícil.*

1.5 Semigrupos com 3 geradores

Considere o semigrupo $\mathcal{S} = \mathcal{S}(a, b, c) = \{p = ma + nb + rc, (m, n, r) \in \mathbb{N}^3\}$ tal que $\text{mdc}(a, b, c) = 1$ e seja $F(a, b, c)$ o número de Frobenius de

\mathcal{S} , isto é, $F(a, b, c)$ é o maior inteiro que não pertence a \mathcal{S} . O regulador aritmético de \mathcal{S} é o número natural $r(\mathcal{S}) = F(a, b, c) + 1$. Esta seção é baseada em [3].

Proposição 3. *O número de Frobenius $F(a, b, c)$ é finito.*

Demonstração. Exercício longo. Veja [7]. ■

Proposição 4. *Seja $\text{mdc}(a, b, c - 1) = d > 1$. Então d divide $r(\mathcal{S}) = F(a, b, c) + 1$.*

Demonstração. Por definição temos que $F(a, b, c) + c \in \mathcal{S}$, $c \geq 1$. Logo $F(a, b, c) + c = ka + lb + mc$ com $k \geq 0$, $\ell \geq 0$ e $m \geq 0$, portanto $F(a, b, c) = ka + lb + (m - 1)c$. Se $m \geq 1$ temos que $F(a, b, c) \in \mathcal{S}$ o que é uma contradição. Logo $m = 0$ e $r(\mathcal{S}) = F(a, b, c) + 1 = ka + lb - (c - 1)$. Portanto $d | (F(a, b, c) + 1)$. ■

Corolário 2. *Suponha a e b pares e $\text{mdc}(a, b, c) = 1$. Então $F(a, b, c) + 1$ é par.*

Um número $n \in \{0, 1, \dots, F(a, b, c)\}$ é chamado do tipo (+) se $n \in \mathcal{S}$ e do tipo (-) se não pertence a \mathcal{S} . O conjugado de n é o número \bar{n} tal que $n + \bar{n} = F(a, b, c)$.

Claramente, se n é do tipo (+) então \bar{n} é do tipo (-), portanto

$$\#\{n : n \text{ é do tipo (+)}\} \leq \frac{1 + F(a, b, c)}{2}$$

e

$$\#\{n : n \text{ é do tipo (-)}\} \geq \frac{1 + F(a, b, c)}{2}.$$

Um número n é chamado do tipo (-, -) se n e \bar{n} forem ambos do tipo (-).

Lema 8. *Temos as seguintes relações entre a quantidade de elementos.*

$$\#\{(+)\} = \frac{F(a, b, c) + 1 - \#\{(-, -)\}}{2}$$

e

$$\#\{(-)\} = \frac{F(a, b, c) + 1 + \#\{(-, -)\}}{2}$$

Em particular se $F(a, b, c)$ for par temos que $\#\{(-, -)\} > 0$ e $\#\{(+)\} \leq \frac{F(a, b, c)}{2}$.

Demonstração. Observamos que o número total de pares (n, \bar{n}) no conjunto $\{0, 1, 2, \dots, F(a, b, c)\}$ é igual a $F(a, b, c) + 1$. Portanto,

$$F(a, b, c) + 1 = \#\{(+, -)\} + \#\{(-, +)\} + \#\{(-, -)\},$$

$$\#\{(+)\} = \#\{(+, -)\} = \#\{(-, +)\} \quad \text{e} \quad \#\{(-)\} = \#\{(+, -)\} + \#\{(-, -)\}.$$

Consequentemente,

$$\#\{(+)\} + \#\{(-)\} = F(a, b, c) + 1, \quad \#\{(-)\} - \#\{(+)\} = \#\{(-, -)\}.$$

Logo temos,

$$\#\{(+)\} = \frac{F(a, b, c) + 1 - \#\{(-, -)\}}{2}$$

e

$$\#\{(-)\} = \frac{F(a, b, c) + 1 + \#\{(-, -)\}}{2}.$$

■

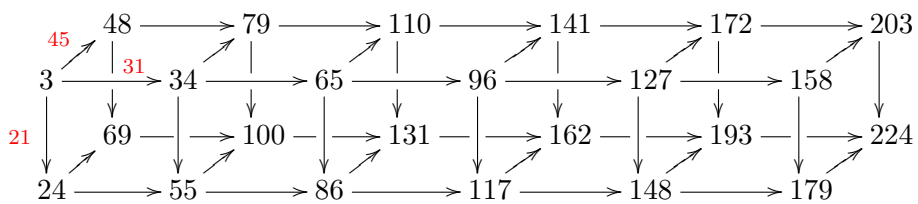
Exemplo 5. No semigrupo $\mathcal{S}(21, 31, 45)$ temos que $F(21, 31, 45) = 227$ e 24 elementos são do tipo $(-, -)$. Explicitamente o semigrupo é:

$\mathcal{S}(21, 31, 45) = \{ 0, 21, 31, 42, 45, 52, 62, 63, 66, 73, 76, 83, 84, 87, 90, 94, 97, 104, 105, 107, 108, 111, 114, 115, 118, 121, 124, 125, 126, 128, 129, 132, 135, 136, 138, 139, 142, 145, 146, 147, 149, 150, 152, 153, 155, 156, 157, 159, 160, 163, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 173, 174, 176, 177, 178, 180, 181, 183, 184, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 194, 195, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 204, 205, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 225, 226, \mathbf{228}, \dots \}$, onde depois do **228** todos os naturais pertencem ao semigrupo.

O conjunto dos elementos do tipo $(-, -)$ é $\{ 3, 24, 34, 48, 55, 65, 69, 79, 86, 96, 100, 110, 117, 127, 131, 141, 148, 158, 162, 172, 179, 193, 203, 224 \}$, cuja cardinalidade é 24.

Usaremos também a representação $\{(-, -)\} = \{(3, 224), (24, 203), (34, 193), (48, 179), (55, 172), (65, 162), (69, 158), (79, 148), (86, 141), (96, 131), (100, 127), (110, 117)\}$ para indicar os 12 pares (a, b) de elementos do tipo $(-, -)$ tais que $a + b = 227$.

O conjunto dos elementos $(-, -)$ tem a seguinte representação geométrica.



Neste paralelepípedo temos três direções, cada um delas revela uma P.A. (progressão aritmética) e a razão de cada uma delas é um dos geradores

do semigrupo (\rightarrow é a P.A. de razão 31; \downarrow é a P.A. de razão 21; \nearrow é a P.A. de razão 45).

Teorema 6 (Arnold, [3]). *Seja $x \in \{0, 1, \dots, F(a, b, c)\}$ e suponha que $p < x < r$ onde p e r são do tipo $(-, -)$.*

Se $r - x \in \{(+)\}$ e $x - p \in \{(+)\}$ então x é do tipo $(-, -)$.

Demonstração. Sendo $r = x + (r - x)$, se x for do tipo $(+)$, como por hipótese $r - x \in \{(+)\}$, então r também seria do tipo $(+)$, o que não é verdade pois estamos supondo $r \in \{(-, -)\}$, portando $x \in \{(-)\}$.

Por outro lado, como $x + \bar{x} = F(a, b, c)$ e $p + \bar{p} = F(a, b, c)$ temos que $x + \bar{x} = p + \bar{p}$ e assim obtemos que $\bar{p} = \bar{x} + (x - p)$. Como $x - p \in \{(+)\}$ e $\bar{p} \in \{(-)\}$, temos obrigatoriamente que \bar{x} é do tipo $(-)$.

Assim, x e \bar{x} são ambos do tipo $(-)$, ou seja, x é do tipo $(-, -)$. ■

Conjectura 7 (Arnold, [3]). *Seja $M = \max\{(-, -)\}$ e $m = \min\{(-, -)\}$ para um semigrupo $\mathcal{S}(a, b, c)$, $\text{mdc}(a, b, c) = 1$. Então $M - m \in \{(+)\} \subset \mathcal{S}(a, b, c)$.*

O seguinte semigrupo com 4 geradores mostra que a conjectura acima é específica para 3 geradores.

Exemplo 8. *Considere o semigrupo \mathcal{S} gerado por 4, 6, 13, 15.*

Temos que $\{(-)\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$ e

$$\mathcal{S}(4, 6, 13, 15) = \{0, 4, 6, 8, 10, \mathbf{12}, 13, 14, 15, 16, 17, 18, \dots\}.$$

O seu número de Frobenius é 11 e $\{(-, -)\} = \{2, 9\}$.

Aqui a diferença do maior elemento $(-, -)$, $M = 9$ e do menor elemento $(-, -)$, $m = 2$ que é 7 e não pertence a $\mathcal{S}(4, 6, 13, 25)$, ou seja, não é do tipo $\{(+)\}$.

Conforme mostrado nos exemplos, os semigrupos com 3 geradores, nem sempre tem a propriedade: “ $n \in \mathbb{N}$ então $n \in \mathcal{S}$ ou $F(a, b, c) - n \in \mathcal{S}$.”

Os semigrupos que possuem a propriedade acima são chamados *semigrupos simétricos*.

1.6 Conclusão

O estudo de semigrupos tem várias aplicações em problemas de geometria algébrica, em particular na geometria e topologia das curvas planas singulares. Veja [2].

A estrutura dos semigrupos gerados por 3 ou mais inteiros é tema atual de pesquisa. Veja [3] e [4]. Para apresentações do Teorema de Pick veja [5] e [10].

Bibliografia

- [1] I. M. ALIEV and P. M. GRUBER. *An optimal lower bound for the Frobenius problem*. Journal of Number Theory **123**: 71-79, (2007).
- [2] R. APÉRY. *Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques*. C. R. Acad. Sci. Paris **222**:1198-1200, (1946).
- [3] V. ARNOLD, *On additive semigroups starting parts*, Funct. Anal. Other Math., **2**:81-86, (2008).
- [4] R. ALFONSÍN, *The Diophantine Frobenius problem*, Oxford Lect. Series in Math. and its Applications, **30**, Oxford Univ. Press, (2005).

- [5] B. GRUNBAUM, G. C. SHEPHARD, *Pick's Theorem*, Amer. Math. Monthly, **100**: 150-161 (1993).
- [6] S. LANG. *Algebra*. 3rd Revised and Enlarged Edition. Springer Verlag. (2002).
- [7] R. GARCIA, Dinâmica e Geometria, II Colóquio de Matemática da Região Nordeste, UFPI, (2012).
- [8] J. J. SYLVESTER, Question 7382, Mathematical Questions from the Educational Times **41** (1884), 21.
- [9] J. J. SYLVESTER, *Excursus on rational fractions and partitions*. Amer. J. Math. **5**:119-136 (1882).
- [10] D.E. VARBERG, *Pick's Theorem Revisited*, Amer. Math. Monthly, **92**:584-587 (1985).

Autor: Ronaldo Garcia

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Posta 131
74001-970 - Goiânia - Goiás - Brasil
ragarcia@mat.ufg.br



Objetivo e Política Editorial

A REVISTA DA OLIMPÍADA tem como objetivo ser um veículo de difusão, principalmente, das Olimpíadas de Matemática do Estado de Goiás, promovidas pelo IME/UFG.

A Revista também está aberta a contribuições de pequenas matérias, subordinados à boa qualidade. O material submetido para a publicação deverá ser de interesse do Ensino Fundamental e Médio, estar bem redigido, em estilo claro, sem aridez, de forma que desperte o interesse do leitor.

Submissão e Aceite

Toda matéria submetida para publicação deve ser enviada ao Comitê Editorial. Matérias redigidas em $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ou $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ podem ser submetidas por e-mail: omeg@mat.ufg.br. Se existirem ilustrações no trabalho submetido, estas devem ser encaminhadas, juntamente com o trabalho, e precisam estar em condições de serem reproduzidas, sem retoques. Além disso, cópias dos desenhos e ilustrações devem ser afixadas em espaços apropriados do texto, exibindo, dessa maneira, como deverá ficar a apresentação final do trabalho.

As referências bibliográficas devem ser colocadas no final do texto, em ordem alfabética, segundo as normas da ABNT.

As matérias submetidas para publicação serão analisadas pelos editores que poderão solicitar pareceres *ad hoc* e o autor receberá a resposta sobre sua matéria num prazo máximo de 120 dias.

Os autores que tiverem os trabalhos aceitos deverão transferir seus direitos autorais para o Instituto de Matemática e Estatística da UFG.