Nº 9
setembro/2014
ISSN 1518-6075

revista DA OLIMPÍADA

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação(CIP)
(GPT/BC/UFG)

Revista da Olimpíada/Universidade Federal de Goiás/
Instituto de Matemática e Estatística.
N º 9 (jul.2014/set. 2015). Goiânia: Editora da UFG, 2014-v. Anual.
Matemática - Periódicos - ISSN 1518-6075 - CDU: 51(05)

Editoração	**Arte da Capa**
José H. da Cruz	Ana P. Chaves
	Anderson V. Macêdo (logomarca)

Tiragem	**Postagem**
500 exemplares	2º semestre de 2014

Revista da Olimpíada, nº 9, 2014
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia
Caixa Postal 131
74.001-970 - Goiânia - Goiás
Tel.: (62) 3521 1208, Fax: (62) 3521 1180
Versão eletrônica disponível em: `www.ime.ufg.br`

Apresentação

Caro Leitor,

A *Revista Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás* é uma publicação anual do Instituto de Matemática e Estatística da UFG e tem como principal público alvo, professores e estudantes do ensino fundamental e médio. Tem como meta ser um veículo de: *difusão cultural, integração Universidade/Escola, espaço de criação e reflexão crítica sobre a ciência Matemática.*

Esperamos que, na leitura dos artigos e problemas propostos e resolvidos, o leitor faça anotações complementares, amplie seus conhecimentos nas bibliografias citadas e principalmente, seja capaz de difundir oralmente e com naturalidade o conteúdo assimilado transmitindo-o a seus colegas, amigos, pais, filhos, etc. Também gostaríamos de receber sugestões e problemas que serão submetidos a análise para possível publicação.

Acreditamos que o domínio da ciência, em particular da matemática, e o seu bom uso são fundamentais para o desenvolvimento da humanidade e nossa atenção para este fato é que todos possam apreciar, aqui, a riqueza da matemática e sejam agentes transformadores para elevarmos a cultura matemática no nosso Estado e no nosso País.

Goiânia, setembro de 2014
Os Editores.

Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás

Comissão Organizadora

Ticianne Proença Bueno Adorno (coordenadora), Ana Paula Chaves (vice-coordenadora), Rogerio Queiroz Chaves e Ole Peter Smith

Universidade Federal de Goiás - Instituto de Matemática e Estatística
Campus Samambaia - Caixa Postal 131 - CEP 74.001-970 - Goiânia-GO
Correio eletrônico: `omeg@mat.ufg.br` Tel:(62)3521-1208 Fax:(62)3521-1180
Site: `www.ime.ufg.br/extensao/olimpiada`

Índice

Sophie Germanin

Na capa desta edição, temos a matemática francesa Marie-Sophie Germain (Paris, 1 de Abril de 1776 - Paris, 27 de Junho de 1831).

Sophie Germain é conhecida por seu trabalho em Teoria dos Números e por suas contribuições em Matemática Aplicada à acústica e elasticidade. Germain foi autodidata, tendo obtido seus conhecimentos através de livros e notas de aulas fornecidas por seus amigos que estudavam na École Polytechnique, que ela, como mulher, não era permitida cursar. Usando um pseudônimo masculino de M. LeBlanc, ela se correspondeu com J. Lagrange, que reconheceu seu talento e apoiou o seu trabalho. Além de Lagrange, se correspondeu também com C. F. Gauss, quem muito lhe inspirou em seus trabalhos sobre Teoria dos Números. Sophie demonstrou uma versão limitada do último teorema de Fermat, para quaisquer primos menores que 100, satisfazendo algumas condições. Em 1816, ela ganhou um prêmio patrocinado por Napoleão pela explicação matemática das figuras de Chladni. Morreu aos 55 anos de câncer de mama.

Carl Friedrich Gauss em uma carta à Sophie Germain (Abril 1807) escreveu:

“Os encantos desta ciência sublime se revelam apenas para aqueles que têm a coragem de ir profundamente dentro dela. Mas quando uma mulher, que por causa do seu gênero e os nossos preconceitos encontra infinitamente mais obstáculos que um homem em familiarizar-se com problemas complicados, sucede no entanto a superar esses obstáculos e penetrar nas partes mais obscuras deles, sem dúvida, ela deve possuir a mais nobre coragem, talentos extraordinários e gênio bastante superior.”

Classificados na XXII OMEG - 2013

Nível 1 (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

Medalha de Ouro

⋆ *Samuel Prieto Lima*/Colégio Integrado Jaó Júnior - Goiânia

Medalha de Prata

⋆ *Heitor Abreu de Andrade*/Colégio Agostiniano - Goiânia

Medalha de Bronze

⋆ *Luiz Gustavo Santos de Souza*/Colégio Santo Agostinho - Goiânia

Menção Honrosa

⋆ *Endre Kurotusch Canettieri*/Colégio Degraus Centro de Estudos - Goiânia

⋆ *Henrique Soares de Araújo P. Farias*/Centro Educacional Omni - Goiânia

⋆ *Gabriel Rodrigues Pinheiro França*/Externato São José - Goiânia

⋆ *Karoline Lemes Faria*/Colégio Santo Agostinho - Goiânia

⋆ *Luiz Vasconcelos Júnior*/Escola Municipal Cristiano Carlos Friaça - São Luis de Montes Belos

⋆ *David Afonso Borges Dos Santos*/Centro Educacional Omni - Goiânia

⋆ *Luis Henrique Zuin Ruiz*/Studium - Goiânia

⋆ *Enzo Mata de Sousa*/Educandário Goiás - Goiânia

⋆ *Robinson Júnior de O.J. Borges*/Prevest - Goiânia

⋆ *Melliza Barbosa Pontes*/Colégio Agostiniano - Goiânia

Nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

Medalha de Ouro

⋆ *Lucca Borges Prado*/Colégio Externato São José - Goiânia

Medalha de Prata

⋆ *Thiago Lucas Faustino da Silva*/CPMG -Dionária Rocha - Itumbiara

Medalha de Bronze

⋆ *Leonardo Augusto Garcia Cunha*/Colégio Agostiniano - Goiânia

Menção Honrosa

⋆ *Abner Eduardo Siveira Santos*/Colégio Crescer - Anápolis

⋆ *Matheus Laureano Nunes Barbosa*/Colégio Ávila - Goiânia

⋆ *Carlos Eduardo Santos Filho*/Educandário Nascentes do Araguaia - Mineiros

⋆ *Lucas Hattori Costa*/Colégio Olimpo - Goiânia

⋆ *André Luís Araújo de Souza*/Colégio Prevest - Sul - Goiânia

⋆ *Gustavo Seabra Garcia*/Educandário Goiás - Goiânia

⋆ *Kevin Rodrigues Erickson*/Colégio Interamérica - Goiânia

⋆ *Sayuri Matsui Esaki*/Colégio Interamérica - Goiânia

⋆ *Larissa Sebba Kafuri*/Colégio Omni - Goiânia

⋆ *Bruno Roberto Santos Macedo*/Colégio Maximum - Goiânia

Nível 3 (Ensino Médio)

Medalha de Ouro

⋆ *Matheus Abrão Abdala*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.

Medalha de Prata

⋆ *Felipe Carvalho Lima*/CPMG - Hugo de Carvalho Ramos - Goiânia.

MEDALHA DE BRONZE

⋆ *Pedro Henrique Machado Bariani*/Colégio Agostiniano - Goiânia

⋆ *Paulo Sérgio S. da Costa Filho*/Colégio Integrado Jaó - Goiânia.

MENÇÃO HONROSA

⋆ *Bruno Porto Silva*/Colégio Prevest - Unidade Centro - Goiânia

⋆ *Arthur Santana Silva*/Colégio Expovest - Goiânia

⋆ *Seidi Yoshida*/Colégio Agostiniano - Goiânia

⋆ *Gustavo Bittar Gonçalves*/Colégio Olimpo - Goiânia

⋆ *Davi Sidarta V. R. de Oliveira*/Colégio Olimpo - Goiânia

⋆ *João Gabriel Silva Santos*/IFG - Campus Formosa - Formosa

⋆ *Pedro Henrique Ferreira Stringhini*/Colégio Agostiniano - Goiânia

⋆ *Rafael Rodrigues Caetano*/Colégio Metropolitano - Goiânia

⋆ *Heitor de Souza Naves*/CPMG - Polivalente Modelo Vasco dos Reis - Goiânia

PRÊMIO DE ESCOLA DESTAQUE NA OMEG 2013:

⋆ *Colégio Integrado Jaó*

⋆ *Colégio Integrado Jaó Júnior*

⋆ *Colégio Agostiniano*

⋆ *Colégio Santo Agostinho*

⋆ *Colégio Externato São José*

⋆ *CPMG - Unidade Dionária Rocha*

⋆ *CPMG - Hugo de Carvalho Ramos*

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 9, setembro de 2014, 5-32

Soluções Comentadas das Provas da XXII OMEG - 2013

Rogerio de Queiroz Chaves, Valdivino Vargas Junior,
Marcelo Almeida de Souza, Anyelle Nogueira de Souza,

Resumo. Apresentamos, a seguir, uma resolução comentada das questões da OMEG de 2013, em que procuramos incorporar, tanto quanto possível, ideias e argumentos apresentados pelos estudantes participantes da OMEG em suas provas, mencionando seus nomes. Para alguns dos problemas, são apresentados comentários adicionais que podem esclarecer e expandir o contexto do problema original, bem como apresentar possibilidades de generalização e propor outros problemas relacionados. Recomendamos que, antes de ler as soluções, o leitor encare o desafio de resolver os problemas por sua conta e desfrute da sensação de conquista e de amadurecimento que esta atividade pode proporcionar. Por isso apresentamos, inicialmente, apenas o texto dos problemas, com as resoluções seguindo-os em separado.

1.1 Provas da XXII OMEG

Nível 1

1. Na brincadeira conhecida como “telefone sem fio”, feita com pessoas enfileiradas, a primeira pessoa cochicha uma frase ao ouvido da segunda, que transmite para a terceira pessoa do mesmo modo, e assim, sucessivamente, até chegar à última pessoa, que revela qual foi a mensagem recebida.

Um grupo de 9 amigos resolveu fazer uma brincadeira semelhante, mas com números de 1 a 99 e com as seguintes regras: se falarem ao seu ouvido um número menor que 50 fale para a próxima pessoa o dobro desse número, mas se o número que chegar a você for 50 ou mais, inverta a ordem dos dígitos do número e passe adiante. Por exemplo, se chegar ao seu ouvido o número 60, cochiche para a próxima pessoa o número 6 (= 06). O desafio da nona pessoa é acertar qual foi o número inicial, falado pela primeira pessoa.

Considerando que não ocorram erros de compreensão ou de cálculos, determine quais são os possíveis valores para o número falado pela primeira pessoa, se o que chegou ao ouvido da nona pessoa foi

(a) 48

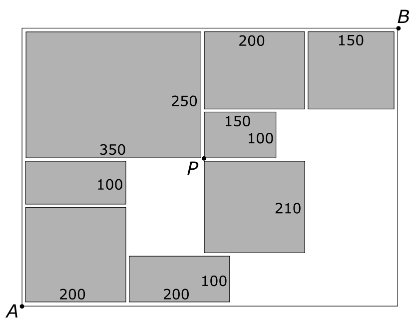
(b) 68

2. Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água. Com esta diluição, a quantidade de suco concentrado que eles têm permite preparar exatamente 400 ml de suco para cada convidado.

(a) Nestas condições, cada litro de suco concentrado é suficiente para preparar suco para quantas pessoas?

(b) Na última hora avisaram que virão à festa cinco pessoas a mais que o previsto. O líder da equipe pensou rapidamente e concluiu que basta mudarem a diluição do suco para cinco partes de água para cada parte de suco concentrado, e novamente terão o equivalente a 400 ml por pessoa. Diante destas informações, qual era o número de convidados previsto originalmente?

3. Um centro de pesquisas possui vários prédios em uma área retangular, como indica o mapa a seguir.



No mapa, os retângulos sombreados indicam os prédios, os números indicam as medidas dos lados, em metros, e os espaços em branco são calçamentos por onde se pode caminhar, inclusive nas ruas entre os prédios.

Um pedestre, inicialmente no ponto indicado por P, deseja caminhar a menor distância possível para chegar a uma das duas saídas, indicadas por A e B, onde há pontos de ônibus,

Determine qual das duas saídas, A ou B, deve ser escolhida e porque.

4. O painel do computador de bordo de um certo carro está configurado para exibir dois números quando o carro está em funcionamento. O primeiro número, indicado no painel por "Dist.", é a distância percorrida, em quilômetros, desde a última vez que o contador foi zerado. O segundo número é o desempenho médio, indicado por "DM", e é o resultado da divisão da distância percorrida, em quilômetros, pela quantidade de combustível consumida no percurso, em litros. Ambos os números são constantemente atualizados durante o funcionamento do carro. No início de uma viagem, os contadores foram zerados e o painel indicava o seguinte:

Dist.:	0,0 km
DM:	--- km/ℓ

Em um certo momento da viagem o motorista percebeu que, curiosamente, o painel indicava dois números iguais

Dist.:	12,2 km
DM:	12,2 km/ℓ

Existe um número máximo de vezes em que este tipo de coincidência dos dois valores pode ocorrer na mesma viagem? Se existe, esse número pode ser determinado?

5. Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo, no sentido horário, de maneira que a primeira pessoa retira um amendoim e passa o pacote à pessoa à sua esquerda. Esta retira dois amendoins e passa o pacote à esquerda. A próxima pessoa retira três amendoins e assim, sucessivamente e podendo dar mais de uma volta em torno do círculo, a distribuição continua com a quantidade retirada aumentando em um amendoim a cada nova retirada ou, caso a quantidade de amendoins no pacote não seja mais suficiente para isso, a última retira todos os amendoins restantes no pacote.

Considerando que, ao final da distribuição, a pessoa que ficou com mais amendoins tenha exatamente 20 amendoins a mais que a pessoa que ficou com menos amendoins, calcule a quantidade mínima de amendoins que deveria haver no pacote no início da distribuição.

6. Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram, cada time jogando contra cada um dos outros duas vezes, uma em sua própria cidade e a outra na cidade do adversário. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto e cada derrota 0 pontos. Se, ao final da primeira fase o total dos pontos somados por todas as equipes foi de 242, quantas partidas desta fase terminaram empatadas?

Nível 2

1. Na brincadeira conhecida como "telefone sem fio", feita com pessoas enfileiradas, a primeira pessoa cochicha uma frase ao ouvido da segunda, que transmite para a terceira pessoa do mesmo modo, e assim, sucessivamente, até chegar à última pessoa, que revela qual foi a mensagem recebida.

Um grupo de 9 amigos resolveu fazer uma brincadeira semelhante, mas com números de 1 a 99 e com as seguintes regras: se falarem ao seu ouvido um número menor que 50 fale para a próxima pessoa o dobro desse número, mas se o número que chegar a você for 50 ou mais, inverta a ordem dos dígitos do número e passe adiante. Por exemplo, se chegar ao seu ouvido o número 60, cochiche para a próxima pessoa o número 6 (= 06). O desafio da nona pessoa é acertar qual foi o número inicial, falado pela primeira pessoa.

Considerando que não ocorram erros de compreensão ou de cálculos, determine quais são os possíveis valores para o número falado pela primeira pessoa, se o que chegou ao ouvido da nona pessoa foi

(a) 48

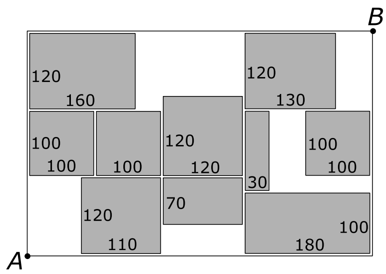
(b) 58

2. Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água. Com esta diluição, a quantidade de suco concentrado que eles têm permite servir exatamente 400 ml de suco para cada convidado.

(a) Nestas condições, cada litro de suco concentrado é suficiente para preparar suco para quantas pessoas?

(b) Na última hora avisaram que virão à festa cinco pessoas a mais que o previsto. O líder da equipe pensou rapidamente e concluiu que basta mudarem a diluição do suco para cinco partes de água para cada parte de suco concentrado, e novamente terão o equivalente a 400 ml por pessoa. Diante destas informações, qual era o número de convidados previsto originalmente?

3. Um centro de pesquisas é constituído de vários prédios dispostos em uma área retangular, conforme indica o mapa a seguir.



No mapa, os retângulos sombreados indicam os prédios, os números indicam as medidas dos lados, em metros, e os espaços em branco são calçamentos por onde se pode caminhar, inclusive nas ruas entre os prédios.

Um pedestre deseja caminhar do ponto A ao ponto B percorrendo a menor distância possível.

Determine, aproximadamente, qual é essa distância mínima e indique no mapa qual caminho deve ser seguido.

4. O painel do computador de bordo de um certo carro está configurado para exibir dois números quando o carro está em funcionamento.

O primeiro número, indicado no painel por "Dist.", é a distância percorrida, em quilômetros, desde a última vez que o contador foi zerado. O segundo número é o desempenho médio, indicado por "DM", e é o resultado da divisão da distância percorrida, em quilômetros, pela quantidade de combustível consumida no percurso, em litros. Ambos os números são constantemente atualizados durante o funcionamento do carro. No início de uma viagem, os contadores foram zerados e o painel indicava o seguinte:

Dist.:	0,0 km
DM:	- - - km/ℓ

Em um certo momento da viagem o motorista percebeu que, curiosamente, o painel indicava dois números iguais

Dist.:	12,2 km
DM:	12,2 km/ℓ

Existe um número máximo de vezes em que este tipo de coincidência dos dois valores pode ocorrer na mesma viagem? Se existe, esse número pode ser determinado?

5. Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram, cada time jogando contra cada um dos outros duas vezes, uma em sua própria cidade e a outra na cidade do adversário. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto e cada derrota 0 pontos. Se, ao final da primeira fase, o total dos pontos somados por todas as equipes foi de 242, quantas partidas desta fase terminaram empatadas?

6. Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo, no sentido horário, de maneira que a primeira pessoa retira um amendoim e passa o pacote à pessoa à sua esquerda. Esta retira dois amendoins e passa o pacote à esquerda. A próxima pessoa retira três amendoins e assim, sucessivamente e podendo dar mais de uma volta em torno do círculo, a distribuição continua com a quantidade retirada aumentando em um amendoim a cada nova retirada ou, caso a quantidade de amendoins no pacote não seja mais suficiente para isso, a última retira todos os amendoins restantes no pacote.

Considerando que, ao final da distribuição, a pessoa com mais amendoins tenha recebido exatamente 20 amendoins a mais que a pessoa que ficou com menos amendoins,

(a) determine a quantidade mínima de amendoins que deveria haver inicialmente no pacote.

(b) Determine a quantidade máxima de amendoins que poderia haver no pacote.

Nível 3

1. Na brincadeira conhecida como “telefone sem fio”, feita com pessoas enfileiradas, a primeira pessoa cochicha uma frase ao ouvido da segunda, que transmite para a terceira pessoa do mesmo modo, e assim, sucessivamente, até chegar à última pessoa, que revela qual foi a mensagem recebida.

Um grupo de 9 amigos resolveu fazer uma brincadeira semelhante, mas com números de 1 a 99 e com as seguintes regras: se você receber um número menor que 50 fale para a próxima pessoa o dobro desse número enquanto que, se o número que chegar a você for 50 ou mais, inverta a ordem dos dígitos do número e passe adiante. Por exemplo, se chegar ao seu ouvido o número 60, cochiche para a próxima pessoa o número 6 (= 06). O desafio da nona pessoa é acertar qual foi o número inicial, falado pela primeira pessoa.

Considerando que não ocorram erros de compreensão ou de cálculos,

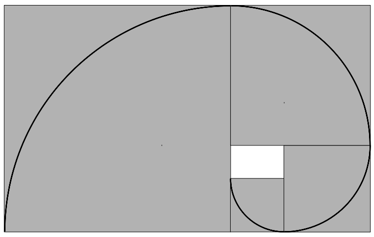
(a) determine os possíveis valores para o número falado pela primeira pessoa, se o que chegou ao ouvido da nona pessoa foi 58.

(b) Determine qual é o menor número que pode chegar ao ouvido da nona pessoa.

2. Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram, cada time jogando contra cada um dos outros duas vezes, uma em sua própria cidade e a outra na cidade do adversário. Cada vitória vale 3 pontos, cada empate 1 ponto e cada derrota 0 pontos. Se, ao final da primeira fase o total dos pontos somados por todas as equipes foi de 242, quantas partidas desta fase terminaram empatadas?

3. Diz-se que dois números estão na razão áurea, se a razão entre o menor e o maior, for igual à razão entre o maior e a soma dos dois. Um retângulo em que os lados estejam na razão áurea é chamado de retângulo áureo e é sempre possível dividi-lo em um quadrado e um retângulo menor, que também é áureo.

A logomarca da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) é a figura representada a seguir, formada pela subdivisão de um retângulo áureo inicial em um quadrado e um retângulo menor. No interior do quadrado, desenha-se um arco de um quarto de círculo, com raio igual ao lado do quadrado. Repete-se o mesmo procedimento para o retângulo menor, resultante da divisão anterior e assim, sucessivamente, forma-se uma espiral pela junção dos arcos de círculo.



Esta logomarca utiliza uma sequência com apenas quatro quadrados. Então, se a figura for feita de forma que cada lado do quadrado maior tenha um metro e considerando $\pi \approx 3{,}14$ e $\sqrt{5} \approx 2{,}24$,

(a) calcule o comprimento aproximado da parte da espiral que aparece na logomarca.

(b) Se a construção continuasse, chegando a 2013 quadrados, qual seria, aproximadamente, o comprimento da espiral?

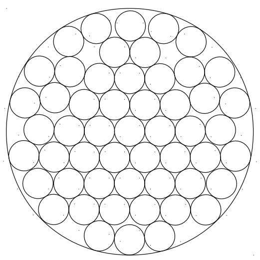
4. Determine todos os possíveis trios de números naturais a, b e c, tais que $(a^4 - b^4) \cdot c = 2013$.

5. Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo, no sentido horário, de maneira que a primeira pessoa retira um amendoim e passa o pacote à pessoa à sua esquerda. Esta retira dois amendoins e passa o pacote à esquerda. A próxima pessoa retira três amendoins e assim, sucessivamente e podendo dar mais de uma volta em torno do círculo, a distribuição continua com a quantidade retirada aumentando em um amendoim a cada nova retirada ou, caso a quantidade de amendoins no pacote não seja mais suficiente para isso, a última retira todos os amendoins restantes no pacote.

(a) Considerando que, ao final da distribuição, a pessoa com mais amendoins tenha ficado com exatamente 20 amendoins a mais que a pessoa que ficou com menos amendoins, determine os números mínimo e máximo para a quantidade de amendoins no pacote antes do início da distribuição.

(b) Determine a quantidade mínima de amendoins que deveria haver no início para que, ao terminar a distribuição, a pessoa com mais amendoins tenha 2013 amendoins a mais que a pessoa que retirou menos amendoins.

6. Um estudante está construindo um jato de água com fluxo laminar e, para eliminar as turbulências do fluxo, a água deve passar por um curto tubo cilíndrico de PVC preenchido com canudinhos de refresco. A idéia é preencher o tubo com o maior número possível de canudinhos, sem deformá-los, de maneira que a seção transversal do tubo fica com o aspecto ilustrado na figura a seguir.



No presente projeto, o estudante vai usar um tubo de PVC com diâmetro interno de 80 mm e peenchê-lo com canudinhos com 4 mm de diâmetro.

(a) Se os canudinhos são comercializados em pacotes com 200 unidades, qual é a quantidade mínima de pacotes que serão necessários?

(b) E se os canudinhos forem comercializados em pacotes com 100 unidades, quantos pacotes serão necessários?

1.2 Resolução comentada

Nível 1

1. *Na brincadeira conhecida como "telefone sem fio"...* (baseado nas soluções apresentadas por *Endre Kurotusch Canettieri*, *Luiz Gustavo Santos de Souza*, *Luiz Henrique Zuin Ruiz*, *Luiz Vasconelos Júnior* e *Robinson Junior de Almeida Japiassú Borges*)

(a) Para fazer o caminho inverso, partindo do número que chega à nona pessoa (que é o número falado pela oitava) é preciso analizar, em cada etapa, quais as possibilidades para o número anterior. Como o número que chegou ao ouvido da nona pessoa foi o oitavo número falado, então o que foi falado pela primeira pessoa deve ser o oitavo na sequência reversa.

Pelas regras do jogo, percebe-se que o número 48 pode ser o sucessor de 84 (pois 84 invertido é 48), ou 24 (pois $2 \times 24 = 48$). O antecessor de 84 só pode ser o número 42 pois nenhum número maior que 50 invertido é 84. Pelo mesmo motivo, o antecessor de 42 só pode ser o número 21. Mas 21 não é divisível por 2 nem resulta da inversão dos dígitos de um número maior que 50, e até aqui só temos 4 números na sequência, então o número que antecedeu 48 só pode ter sido 24.

O antecessor de 24 só pode ser o número 12, pois nenhum número maior que 50 invertido é 24, e o antecessor de de 12 só pode ser o número 6.

O antecessor de 6 pode ser o número 3 ou o número 60. Como 3 é ímpar e nenhum número maior que 50 invertido é 3, e até aqui só temos 5 números, o antecessor de 6 é 60.

Por sua vez, o antecessor de 60 é 30, pois $2x \times 30 = 60$ e nenhum número maior que 50 invertido é 60. Do mesmo jeito, o antecessor de 30 é 15 e o antecessor de 15 é 51, pois 15 é ímpar. Assim, como 51 é o oitavo número da sequência, este é o que a primeira pessoa falou. O diagrama a seguir representa, resumidamente as possibilidades analisadas.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 3 & & & & & & \\
 & & & & & & & \swarrow & & & & & & & \\
48 & \leftarrow & 24 & \leftarrow & 12 & \leftarrow & 6 & \leftarrow & 60 & \leftarrow & 30 & \leftarrow & 15 & \leftarrow & 51 \\
 & \nwarrow & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 84 & \leftarrow & 42 & \leftarrow & 21 & & & & & & & &
\end{array}$$

(b) Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior, se o oitavo número foi o 68, o sétimo número pode ser 86 ou 34. O antecessor de 34 só pode ser 17, e o antecessor de 17 só pode ser 71, que não pode ter sucedido qualquer outro número, segundo as regras. Além disso, o antecessor de 86, tanto pode ser 68 quanto 43, mas este último também não tem antecessores possíveis com as regras do jogo.
Neste ponto é interessante observar que a sequência pode ficar alternando entre 68 e 86, e as possíveis sequências com 8 números estão representadas no diagrama a seguir.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 34 & \leftarrow & 17 & \leftarrow & 71 \\
 & & & & & & & & & \swarrow & & & & & \\
68 & \leftarrow & 86 & \leftarrow & 68 & \leftarrow & 86 & \leftarrow & 68 & \leftarrow & 86 & \leftarrow & 68 & \leftarrow & 86 \\
 & & & & & & & & & & & \nwarrow & & \nwarrow & \\
 & & & & & & & & & & & & 43 & & 34
\end{array}$$

Este diagrama deveria ter bifurcações semelhantes em cada 68 e em cada 86, mas apenas algumas delas foram exibidas para simplificar a representação. Na sequência que alterna entre 68 e 86, o número 68 ocupa as posições ímpares e 86 as pares. Assim, os possíveis valores para o número falado pela primeira pessoa (oitavo da sequência reversa), são 34, 71 e 86.

---

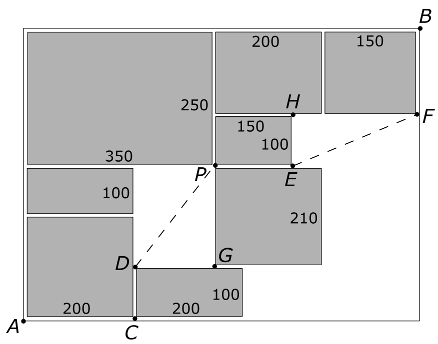
2. *Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água...*

Ver resolução do **problema 2** do **nível 2**.

---

3. *Um centro de pesquisas é constituído de vários prédios dispostos em uma área retangular...* (solução proposta pela equipe da OMEG)

Levando-se em conta que, em um triângulo, qualquer lado é sempre mais curto que a soma dos outros dois (mais que isso, o segmento de reta que une dois pontos é sempre mais curto que qualquer outro caminho ligando os mesmos dois pontos), podemos reduzir os possíveis candidatos a caminho mais curto às linhas poligonais $PCDA$ ou $PEFB$, indicadas na figura a seguir.



Como $\overline{AC} + \overline{CD} = \overline{PE} + \overline{FB} = 300$, resta comparar $\overline{PD}$ e $\overline{EF}$. Os triângulos PGD e EHF ambos possuem um ângulo reto (formado pelos lados que são paralelos aos do retângulo maior) e, das medidas apresentadas na figura, é fácil deduzir que $\overline{PG} = 210$, $\overline{DG} = 150$, $\overline{HF} = 200$ e $\overline{EH} = 100$. Então, podemos sobrepor dois triângulos com estas medidas, fazendo coincidir o ângulo reto, para verificar que PD é mais longo que EF e, portanto, a saída mais próxima de P é a B.

Observação: Um fato curioso é que parte dos estudantes do nível 1 não chegou sequer a considerar as linhas diagonais das regiões não sombreadas na obtenção do caminho mais curto. Isto pode ter ocorrido por não terem entendido bem o enunciado ou por não perceberem que o segmento de reta ligando dois pontos é mais curto que qualquer outro caminho ligando os mesmos dois pontos. Mesmo usando esta noção, alguns não conseguiram concluir pela dificuldade em calcular os comprimentos das diagonais e a solução aqui apresentada é um bom exemplo de que, para se comparar duas quantidades, nem sempre é necessário conhecer seu valor. A questão pergunta apenas qual é o caminho mais curto e vimos que isto pode ser respondido sem calcular as medidas das linhas diagonais, o que iria requerer o Teorema de Pitágoras e estaria fora do conteúdo previsto para o nível 1.

Ainda assim, o estudante *Samuel Prieto Lima* argumentou corretamente que, utilizando-se o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos PGD e EHF, é possível determinar $\overline{EF}$ e $\overline{DP}$, sabendo que $\overline{PG} = 210$, $\overline{DG} = 150$, $\overline{HF} = 200$ e $\overline{EH} = 100$. Assim, a menor distância possível para a saída B é $300+100\sqrt{5}$ e para a saída A é $300+100\sqrt{6,66}$. Como $\sqrt{5} < \sqrt{6,66}$, então a saída mais próxima de P é a B. Neste caso, uma alternativa mais simples seria comparar as medidas das diagonais elevadas ao quadrado, o que já vem diretamente do Teorema de Pitágoras e não requer o cálculo das raízes quadradas.

---

4. *O painel do computador de bordo de um certo carro está configurado para exibir dois números...* (baseado nas soluções apresentadas por *Heitor Abreu de Andrade*, *Melliza Barbosa Pontes* e *Robinson Junior de Almeida Japiassú Borges*)

Os dois números coincidem quando a quantidade de combustível consumida a partir do momento em que os contadores foram zerados atinge exatamente um litro, uma vez que aí a distância percorrida, dividida por um, resulta no mesmo número para o desempenho médio. Portanto, isto só pode ocorrer uma vez em uma mesma viagem (sem zerar o contador novamente).

Observação: Esta solução assume, implicitamente, que a viagem se inicia quando o carro começa a se deslocar, o que é razoável. Enquanto o carro estiver parado e com o motor em funcionamento, antes do início da viagem, há consumo de combustível, mas a distância percorrida é nula, então os dois números, Dist. e DM, devem ser iguais a zero.

---

5. *Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo, no sentido horário...*

Ver resolução do item **(a)** do **problema 6** do **nível 2**.

---

6. *Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram...* (Baseada nas resoluções apresentadas por *Gabriel*

Rodrigues Pinheiro França, *Luiz Henrique Zuin Ruiz* e *Samuel Prieto Lima*)

Em cada uma das dez cidades ocorrem nove partidas (o time da casa enfrenta cada um dos outros). Assim, na primeira fase foram disputadas 90 partidas no total. Se nenhuma terminasse empatada, em cada partida um dos times somaria três pontos e o outro zero, totalizando 270 pontos na primeira fase. Cada partida empatada resulta em um ponto para cada time, ou seja, dois pontos na partida. Assim, cada partida empatada resulta em um ponto a menos que se ela tivesse terminado com a vitória de um dos times. Como o total de pontos somados ao final da primeira fase foi $242 = 270 - 28$, conclui-se que 28 partidas terminaram empatadas.

Nível 2

1. *Na brincadeira conhecida como "telefone sem fio"...*

(a) Ver resolução do **problema 1** do **nível 1**.

(b) Ver resolução do item **(a)** do **problema 1** do **nível 3**.

---

2. *Os organizadores de uma festa de aniversário preparam um suco de fruta misturando uma parte de suco concentrado e quatro partes de água...* (baseado nas soluções apresentadas por *Leonardo Augusto Garcia Cunha* e *Thiago Lucas Faustino da Silva*)

(a) Cada litro de suco concentrado é misturado a quatro litros de água, totalizando cinco litros, ou 5000 ml. Dividindo por 400 ml (quantidade por pessoa), obtém-se 12,5 pessoas, ou seja o suco é suficiente para 12 pessoas beberem 400 ml cada e sobram 200 ml.

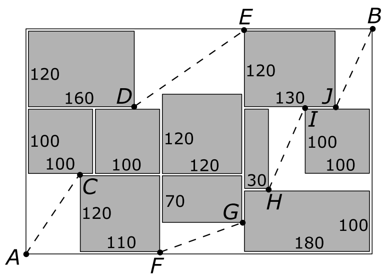
(b) Como a diluição original contém $1/5$ (ou 20%) de suco concentrado, a quantidade de suco concentrado em cada porção de 400 mL é de $400\,\text{mL}/5 = 80\,\text{mL}$. Na nova diluição, a porção por convidado terá $400\,\text{mL}/6$ de suco concentrado. Como a quantidade, total de suco concentrado não é alterada, se n é o número original de convidados, tem-se $n \cdot 80 = (n+5) \cdot 400/6$. Logo, $n = 25$, ou seja, havia inicialmente uma previsão de 25 convidados.

Observação: Uma outra argumentação interessante e que resulta em um cálculo mais simples parte da observação de que, como a parte de suco concentrado não muda, "uma parte" de água, acrescentada na diluição, corresponde ao suco suficiente para as cinco pessoas que não estavam previstas, ou seja, $5 \times 400 = 2000\,\text{ml}$. Portanto, uma parte de água corresponde, neste caso, a dois litros, o que equivale a cinco porçoes de $400\,\text{mL}$. Como o suco originalmente preparado continha uma parte de suco e quatro de água, ele consistia de dez litros, sendo suficiente para $10000 \div 400 = 25$ pessoas.

---

3. *Um centro de pesquisas é constituído de vários prédios dispostos em uma área retangular...* (baseado nas soluções apresentadas por *Lucca Borges Prado* e *Thiago Lucas Faustino da Silva*)

A figura a seguir destaca alguns pontos de referência importantes no mapa.



Levando-se em conta que em um triângulo qualquer lado é sempre mais curto que a soma dos outros dois, podemos reduzir os possíveis candidatos a caminho mais curto às linhas poligonais passando por AC e DEB, por AC e $HIJB$ ou por AFG e $HIJB$, sempre conectando as duas partes pelas ruas entre os prédios. Para poder comparar os comprimentos, é necessário calcular as diagonais tracejadas na figura e, das medidas apresentadas, é possível deduzir que AC é hipotenusa de um triângulo retângulo, com catetos medindo 90 e 120. Assim, pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AC}^2 = 120^2+90^2 = 100(144+81) = 100\cdot 225 = 10^2\cdot 15^2 \quad\Rightarrow\quad \overline{AC} = 150.$$

De maneira análoga,

$$\overline{DE}^2 = 120^2+160^2 = 100(144+256) = 100\cdot 400 = 10^2\cdot 20^2 \quad\Rightarrow\quad \overline{DE} = 200.$$

Quanto a FG, HI e JB, os três são hipotenusas de triângulos retângulos cujos catetos medem 50 e 120. Logo,

$$120^2+50^2 = 100(144+25) = 100\cdot 169 = 10^2\cdot 13^2 \quad\Rightarrow\quad \overline{FG} = \overline{HI} = \overline{JB} = 130.$$

Então, calculando o comprimento dos caminhos, tem-se, por AC e DEB, como as ruas de C a D somam $10+100+60 = 170$ e $\overline{EB} = 180$ o caminho de A a B, passando por DE totaliza $150 + 170 + 200 + 180 = 700\,\text{m}$.

Por AC e $HIJB$, as ruas de C a H somam $10+100+120+20+30 = 280$ e $\overline{IJ} = 50$. Logo, este caminho totaliza $150+280+130+50+130 = 740\,\text{m}$.

Finalmente, por AFG e $HIJB$, tem-se $\overline{AF} = 200$, as ruas de G a H somam $50 + 30 = 80$ e $\overline{IJ} = 50$. Então, este caminho totaliza $200 + 130 + 80 + 130 + 50 + 130 = 720\,\text{m}$.

Portanto, o caminho mais curto é o que passa por AC e DEB, com 700 metros.

---

4. *O painel do computador de bordo de um certo carro está configurado para exibir dois números...*

Ver resolução do **problema 4** do **nível 1**.

---

5. *Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram...*

Ver resolução do **problema 6** do **nível 1**.

---

6. *Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo...* (baseado na solução apresentada por *Lucca Borges Prado*)

(a) Havendo amendoins no pacote em quantidade suficiente, os números de amendoins retirados por cada pessoa nas três primeiras rodadas são

Pessoa:	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Uma simples inspeção desta tabela permite observar que a diferença entre quem retirou mais e quem retirou menos amendoins é maior quando a última pessoa a retirar retira exatamente um amendoim a mais que a retirada anterior, ou seja, a quantidade de amendoins restantes no pacote após a penúltima retirada é exatamente o número de amendoins desta penúltima retirada mais um. Por exemplo, se na segunda rodada a 3ª pessoa retira exatamente os 13 últimos amendoins, ela torna-se a pessoa que retirou mais amendoins, 16 no total, enquanto que a que retirou menos amendoins fica sendo a 4ª, com 4. Uma diferença de 12. Por outro lado, se houver de 1 a 12 amendoins nesta última retirada, a pessoa que retirou menos continua tendo 4 e a retirou mais (que pode ser a 2ª ou a 3ª) terá retirado menos que 16, resultando em uma diferença menor. Além disso, a cada retirada a diferença entre quem tem mais e quem tem menos amendoins aumenta em uma unidade, exceto quando a última retirada é feita pela 10ª pessoa, caso em que a diferença entre esta e a 1ª pessoa se mantém a mesma que havia entre a 9ª e a 10ª após a retirada anterior. Considerando estas características da distribuição e procurando ao longo da tabela, verifica-se que a diferença de 20 entre o que retirou menos e o que retirou mais ocorre o mais cedo possível quando a 2ª pessoa retira os últimos 22 amendoins, totalizando $22 + 12 + 2 = 36$, enquanto que a 3ª pessoa teria $13 + 3 = 16$. E, para que isso ocorra, a quantidade inicial de amendoins no pacote deve ser $1+2+3+\cdots+21+22 = (1+22)+(2+21)+...+(11+12) = 11 \times 23 = 253$.

(b) Para se obter a quantidade inicial máxima de amendoins que resulta, ao final, em uma diferença de 20 entre o que retirou mais e o que retirou menos, é importante observar que, como em cada rodada cada pessoa retira um amendoim a mais que a pessoa que a antecedeu, cada pessoa, logo após retirar amendoins pela n-ésima vez terá n amendoins a mais que a pessoa que a antecedeu. Por exemplo, na segunda rodada cada pessoa fica com dois amendoins a mais que a pessoa que a antecede, um deles conseguido na 1ª rodada e o outro na 2ª. Então, quando chegar a terceira rodada, se a pessoa que tirou mais amendoins for a última a retirar, antes dessa última retirada ela tinha dois amendoins a menos que a pessoa que a sucede na roda e, portanto, ela precisa ter retirado 22 nesta última retirada para ter 20 amendoins a mais que a pessoa que retirou menos (que será a próxima pessoa na roda), se, por outro lado, a última pessoa tiver retirado de 2 a 21 (por não haver mais amendoins no pacote) e a penúltima 24, a diferença de 20 também estará garantida pelo mesmo motivo. E, ainda, se a última retirada tiver sido de 1, a pessoa que fez esta retirada é quem retirou menos (uma vez que a pessoa seguinte na roda já tinha dois amendoins a mais que ela neste ponto) e como esta última a retirar tinha 2 a mais que a anterior, da segunda rodada, e retirou mais um amendoim, a penúltima retirada precisaria ser de 23 para resultar em uma diferença de 20. Comparando todas estas possibilidades, verifica-se que, para se utilizar o máximo de amendoins na distribuição, a penúltima pessoa a retirar seria a 4ª, retirando 24 e a 5ª finaliza, retirando 22. Neste caso, a quantidade inicial de amendoins seria $1 + 2 + 3 + \cdots + 23 + 24 + 22 = 322$.

Observação: Uma análise mais detalhada e mais geral deste problema pode ser encontrada na solução do item **(b)** do **problema 5** do **nível 3**.

Nível 3

1. *Na brincadeira conhecida como "telefone sem fio"...* (baseado na solução apresentada por *Matheus Abrão Abdala* e na proposta pela equipe da OMEG)

(a) Se o oitavo número foi 58, de acordo com as regras o sétimo número pode ter sido 85 ou 29. Como estes são ímpares, e considerando que a brincadeira se restringe aos números naturais, o sexto número pode ter sido 58 ou 92. Seguindo o mesmo raciocínio, o quinto número pode ter sido 85, 29 ou 46. Então o quarto número pode ter sido 58, 92, 64 ou 23. Mas 23 é ímpar e invertendo-se os seus dígitos tem-se $32 < 50$, então 23 não tem antecessores possíveis na brincadeira. O terceiro número pode ter sido 85, 46, 29 ou 32, o segundo 58, 92, 64 ou 16. Destes números, conclui-se, finalmente, a primeira pessoa só pode ter falado um dos seguintes números: 85, 29, 46, 32, 61 ou 8.

Note que, uma vez que alguém fala 58 ou 85, a sequência passa a alternar entre estes dois números. O diagrama a seguir permite visualizar as possíveis sequências terminando em 58, observando que em cada 58 da sequência que aparece no meio há uma bifurcação semelhante às duas que são mostradas, podendo o 58 vir de um 85 ou um 29.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & 29 & \leftarrow & 92 & \leftarrow & 46 & \leftarrow & 64 & \leftarrow & 32 & \leftarrow & 16 & \leftarrow & \cdots \\
 & & & & & \swarrow & & & & & & & & & & & & & \\
58 & \leftarrow & 85 & \leftarrow & 58 & \leftarrow & 85 & \leftarrow & \cdots & & & & & & 61 & & & & \\
 & \nwarrow & & & & & & & & & & & & \swarrow & & & & & \\
 & & 29 & \leftarrow & 92 & \leftarrow & 46 & \leftarrow & 64 & \leftarrow & 32 & \leftarrow & 16 & \leftarrow & 8 & \leftarrow & 80 & \leftarrow & \cdots \\
 & & & & & & & \nwarrow & & & & & & & & \nwarrow & & & \\
 & & & & & & & & 23 & & & & & & & & 4 & \leftarrow & \cdots
\end{array}
$$

(b) Na sequência de 8 números falados pelos participantes, pelo menos um deles deve ser resultado da inversão dos dígitos do anterior (experimente começar com 1 e seguir as regras) e esta é a melhor maneira de se obter números menores no final da sequência. O menor número que pode resultar da inversão dos dígitos é 5 (obtido do 50), mas investigando-se as possíveis sequências que terminam em 5, tem-se

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
5 & \leftarrow & 50 & \leftarrow & 25 & \leftarrow & 52 & \leftarrow & 26 & \leftarrow & 62 & \leftarrow & 31 \\
 & & & & & & & & & \nwarrow & & & \\
 & & & & & & & & & & 13 & &
\end{array}
$$

De onde se conclui que uma sequência de 8 números obedecendo às regras não pode terminar em 5. Utilizando o mesmo argumento para 6, tem-se

$$\begin{array}{ccccccccc} 6 & \leftarrow & 60 & \leftarrow & 30 & \leftarrow & 15 & \leftarrow & 51 \\ & \nwarrow & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & \end{array}$$

e, para 7:

$$7 \leftarrow 70 \leftarrow 35 \leftarrow 53$$

Todas sequências muito curtas. Mas terminando em 8 é possível uma sequência mais longa:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 8 & \leftarrow & 80 & \leftarrow & 40 & \leftarrow & 20 & \leftarrow & 10 & \leftarrow & 5 & \leftarrow & 50 & \leftarrow & 25 & \leftarrow & 52 \leftarrow \cdots \\ & \nwarrow & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & 4 & \leftarrow & 2 & \leftarrow & 1 & & & & & & & & & & \end{array}$$

Portanto, o menor número que pode chegar ao ouvido da nona pessoa é 8 (basta que a primeira pessoa fale “25”).

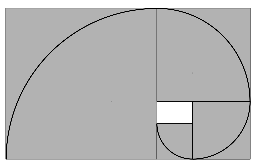
---

2. *Na primeira fase de um campeonato, dez equipes de cidades diferentes se enfrentaram...*

Ver resolução do **problema 6** do **nível 1**.

---

3. *Diz-se que dois números estão na razão áurea, se a razão entre o menor e o maior, for igual à razão entre o maior e a soma dos dois...* (baseado nas soluções apresentadas por *Matheus Abrão Abdala*, *Felipe Carvalho Lima*, *Bruno Porto Selva*, *Paulo Sérgio Sucasas da Costa Filho*, *Pedro Henrique Ferreira Stringhini* e *Davi Sidarta V. R. de Oliveira*)



(a) Denotando por Φ o lado do segundo maior quadrado, tem-se, da definição de retângulo áureo, que

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{1+\Phi} \quad \Rightarrow \quad \Phi^2 + \Phi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}62\,,$$

uma vez que a outra raiz da equação é negativa. As expressões acima permitem, ainda, deduzir que $\Phi^2 = 1 - \Phi$ e $1 + \Phi = 1/\Phi$. Assim, o lado do terceiro maior quadrado é $1 - \Phi = \Phi^2$, e o do quarto quadrado $\Phi - \Phi^2 = \Phi(1 - \Phi) = \Phi^3$, que também equivale a $2\Phi - 1$. Como o comprimento do arco de um quarto de círculo com raio r é $\pi r/2$, o comprimento da espiral será

$$\frac{\pi}{2}(1 + \Phi + \Phi^2 + \Phi^3) \;=\; \frac{\pi}{2}(1 + \Phi + 1 - \Phi + 2\Phi - 1)$$

$$=\; \frac{\pi}{2}(1 + 2\Phi) \;=\; \frac{\pi\sqrt{5}}{2} \;\approx\; 3{,}14 \cdot 1{,}12 \;=\; 3{,}5168\,\text{m}.$$

(b) Se a construção continuasse, chegando a 2013 quadrados, observando que o lado de cada quadrado, a partir do terceiro, é a diferença entre os lados dos dois quadrados que o precedem e denotando por ℓ_k o lado do k-ésimo quadrado, o comprimento da espiral seria

$$\frac{\pi}{2}\left[\ell_1 + \ell_2 + (\ell_1 - \ell_2) + (\ell_2 - \ell_3) + \cdots + \ell_{2011} - \ell_{2012}\right]$$

$$=\; \frac{\pi}{2}\left(2\ell_1 + \ell_2 - \ell_{2012}\right) \;=\; \frac{\pi}{2}\left(2 + \Phi - \Phi^{2011}\right),$$

uma vez que com $\ell_k = \Phi^{k-1}$. Quanto a Φ^{2011}, trata-se de uma parcela desprezível, uma vez que $\Phi < 1$ e suas potências decrescem à medida em que se aumenta o expoente. Mais especificamente,

$$\Phi^2 = 1 - \Phi < \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \Phi^8 < \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow\quad \Phi^{2011} < \Phi^{2000} = (\Phi^8)^{250} < 10^{-250}.$$

Logo, o comprimento da espiral com 2013 quadrados seria, aproximadamente

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\Phi^2} \;=\; \frac{\pi}{2}(2 + \Phi) \;=\; \frac{\pi(3 + \sqrt{5})}{4} \;\approx\; 3{,}14 \cdot 1{,}31 \;=\; 4{,}11\,\text{m}.$$

Observações: Historicamente, a razão áurea é definida como a razão entre o maior e o menor segmentos, nas condições descritas no enunciado, e denotada por $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$, também conhecido como número de ouro (ou número áureo). A letra grega ϕ (fi) foi escolhida em referência a um escultor chamado Fídias. No caso deste problema da OMEG, em que a sequência das medidas dos segmentos é decrescente, foi mais conveniente trabalhar com o recíproco da razão áurea, o número $\Phi = 1/\phi = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}618$, que é a razão da progressão geométrica dos lados dos quadrados e, consequentemente, dos comprimentos dos arcos de círculo.

No item **(b)**, o comprimento da espiral também pode ser obtido diretamente da soma dos termos da PG, como

$$\frac{\pi}{2}(1+\Phi+\Phi^2+\cdots+\Phi^{2012}) \;=\; \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1-\Phi^{2013}}{1-\Phi} \;=\; \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\Phi^2}-\Phi^{2011}\right),$$

Que é equivalente ao resultado anterior, se observarmos que, pelas propriedades da razão áurea, $1+\Phi = 1/\Phi \;\Rightarrow\; (1/\Phi)^2 = 1+2\Phi+\Phi^2 = 2+\Phi$.

Em questões como esta, envolvendo cálculos com números não inteiros, como π e $\sqrt{5}$, mesmo que se pudesse usar um computador ou calculadora, convém desenvolver os cálculos e simplificar as expressões tanto quanto possível sem substituir os valores (aproximados) desses números que, além de dificultarem os cálculos, aumentam a imprecisão da resposta. Em uma situação em que não se possa utilizar calculadora, note como o desenvolvimento aqui apresentado, fazendo uso das propriedades da razão áurea, permite várias simplificações e reduz a necessidade de cálculos com os valores das constantes.

---

4. *Determine todos os possíveis trios de números naturais a, b e c, tais que* $(a^4-b^4)\cdot c = 2013$. (baseado nas soluções apresentadas por *Felipe Carvalho Lima* e *Matheus Abrão Abdala*)

Uma maneira de facilitar esta tarefa é escrever os dois termos em uma forma fatorada. Para o lado esquerdo, basta observar que

$$a^4-b^4 \;=\; (a^2+b^2)(a^2-b^2) \;=\; (a^2+b^2)(a+b)(a-b)\,.$$

Sendo $a > b$, naturais, todos estes fatores serão também naturais, com $(a^2+b^2) > (a+b) > (a-b)$ e, no caso desta questão, todos devem ser divisores de 2013.

Fatorando 2013, nota-se que é divisível por 3, com $2013 = 3\cdot 671$. Busca-se, então na sequência dos números primos o primeiro que seja divisor de 671, encontrando $671 = 11 \cdot 61$. E 61, não sendo divisível por nenhum número primo menor que 8 (crivo de Eratóstenes), é número primo. Portanto, a fatoração de 2013 em primos é $3 \cdot 11 \cdot 61$, de forma que a equação original é equivalente a

$$(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)c \;=\; 61 \cdot 11 \cdot 3\,.$$

Verificando cada possibilidade de identificar fatores dos dois lados, cada fator do lado esquerdo tem que ser um divisor de 2013. Assim, se $a-b = 1$, então $a + b$ poderia ser 3, 11 ou 33. Mas $a + b = 3 \;\Rightarrow\; a = 2$ e $b = 1 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = 5$, que não divide 2013. De modo análogo $a + b = 11 \;\Rightarrow\; a = 6$ e $b = 5 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = 61$ e, neste caso, com $c = 3$ a equação é satisfeita. Continuando a verificação, tem-se $a + b = 33 \;\Rightarrow\; a = 17$ e $b = 16 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 > 400$, enquanto que, de 2013, restaria apenas o fator 61. Considerando agora $a - b = 3$, seria preciso que $a + b = 11 \;\Rightarrow\; a = 7$ e $b = 4 \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = 65$, que não divide 2013.

Portanto, a única solução para o problema é obtida com $a = 6,\ b = 5$ e $c = 3$.

Observações: No ensino básico e mesmo em algumas áreas do ensino superior, por conveniência, normalmente se inclui o zero no conjunto dos números naturais (ou pode-se dizer também que, em matemática superior, por outras conveniências, o zero é excluído de $\mathbb{N}$). Neste caso, no contexto do ensino médio, também é correta a solução com $a = 1,\ b = 0$ e $c = 2013$.

---

5. *Dez pessoas estão, lado a lado, em torno de um círculo. Um pacote com amendoins é passado pelo círculo...*

(a) Ver resolução do **problema 6** do **nível 2**.

Observação: Embora a resolução apresentada mostre que os números mínimo e máximo de amendoins no início devem ser, respectivamente 253 e 322, isto não quer dizer que qualquer valor entre estes resulte, ao final, em uma diferença de 20 entre quem tem mais e quem tem menos. Esta diferença final só vai ocorrer para algumas quantidades iniciais de amendoins e um bom exercício é determinar quais são todas as possibilidades para a quantidade inicial de amendoins que produzem este resultado.

(b) (baseado na solução apresentada por *Pedro Henrique Machado Bariani* e na proposta pela equipe da OMEG)

Conforme argumentado na resolução do **problema 6** do **nível 2**, a diferença de 2013 entre o que retirou mais amendoins e o que retirou menos é atingida o mais cedo possível se a última pessoa a retirar conseguir retirar o máximo possível para aquela retirada, ou seja, um amendoim a mais que os da retirada anterior. Esta será, então, a pessoa a retirar mais e sua sucessora na roda será a que retirou menos. Considerando que, ao final de n rodadas completas, cada pessoa, da 2ª à 10ª, tem exatamente n amendoins a mais que a pessoa que a antecede na roda, se a diferença de 2013 ocorrer na rodada $n+1$ a última pessoa terá que retirar $2013+n$ para ter 2013 a mais que a pessoa que a sucede na roda. Além disso, na rodada $n+1$, a k-ésima pessoa da roda retira $10n+k$ amendoins (veja a tabela na resolução do **problema 6** do **nível 2**) e então, para que a retirada de $2013+n$ caia na rodada $n+1$ é necessário que

$$10n+1 \;\leq\; 2013+n \;\leq\; 10n+10$$

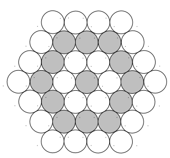
A primeira desigualdade implica $9n \leq 2012$ e a segunda, $9n \geq 2003$. Então, a única possibilidade com n inteiro é $9n = 2007 \;\Rightarrow\; n = 223 \;\Rightarrow\; 2013+n = 2236$ amendoins retirados pela 6ª pessoa (por que?) na última retirada. Portanto, o número mínimo de amendoins necessários ao início é $1+2+3+\cdots+2236 \;=\; 1118\cdot 2237 \;=\; 2500966$.

Observação: Um excelente desafio agora é, como no item **(a)**, determinar a quantidade **máxima** de amendoins que poderia haver no início para que, ao terminar a distribuição, a pessoa com mais amendoins tenha 2013 amendoins a mais que a pessoa que retirou menos amendoins. Ainda melhor seria determinar todos as possíveis quantidades iniciais que resultam nessa diferença final de 2013 entre quem retirou mais e quem retirou menos.

---

6. *Um estudante está construindo um jato de água com fluxo laminar e, para eliminar as turbulências do fluxo, a água deve passar por um curto* *tubo cilíndrico de PVC preenchido com canudinhos de refresco...* (baseado nas soluções apresentadas por *Felipe Carvalho Lima*, *Seidi Yoshida* e na proposta pela equipe da OMEG)

(a) Como o diâmetro do tubo de PVC é 20 vezes o dos canudinhos, a área de sua seção transversal é $20^2 = 400$ vezes a área da seção transversal de um canudinho. De forma que não são necessários mais que 400 canudinhos, ou seja, dois pacotes de 200 para preencher o tubo. Resta determinar se um pacote não seria suficiente. Em termos da seção transversal, parece razoavelmente intuitivo que a área ocupada pelo interior dos canudinhos é, em geral, maior que a dos espaços entre os canudinhos, de forma que a área ocupada pelos canudinhos é mais da metade da área da seção do tubo o que leva à conclusão que são necessários mais da metade dos 400 canudinhos para cobrir essa área, ou seja, mais que um pacote de 200. Esta argumentação, no entanto, não é muito rigorosa e não prova que haja de fato uma disposição dos canudinhos dentro do tubo em que a área entre os canudinhos seja menor que metade da área da seção do tubo. Com o objetivo de apresentar uma justificativa melhor fundamentada, que também será útil para resolver o item **(b)**, uma observação do arranjo dos canudinhos centrais na figura que acompanha o enunciado da questão remete ap fato de que em volta de um círculo é possivel distribuir, de maneira exata, seis outros círculos idênticos. De fato, os centros dos círculos serão vértices de triângulos equiláteros e os centros dos seis círculos tangentes ao central são vértices de um hexágono regular. A construção pode continuar em camadas, como indica a figura a seguir.

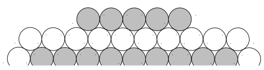


A cada nova camada, cada lado do novo hexágono possui um círculo a mais que o lado do hexágono da camada anterior, de forma que a primeira camada hexagonal é formada por 6 círculos, a segunda 12, a terceira 18 e, assim, sucessivamente, com a n-ésima camada tendo $6n$ círculos. Cada diagonal da n-ésima camada hexagonal é formada por uma fileira de $2n+1$ círculos, o que determina o diâmetro de um círculo que circunscreve esta configuração com n camadas hexagonais como sendo $2n+1$ vezes o diâmetro do canudinho. Nesta construção, o número de canudinhos empregados é

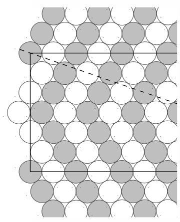
$$1+6+12+18+\cdots+6n \;=\; 1+6(1+2+3+\cdots+n) \;=\; 1+3n(n+1).$$

Para que uma configuração desse tipo, em camadas hexagonais, caiba dentro do tubo com 80 mm de diâmetro, é suficiente que $(2n+1)\cdot 4\,\text{mm} < 80\,\text{mm}$, ou seja, $8n < 76 \;\Rightarrow\; n \leq 9$. Para $n=9$, a quantidade de canudinhos necessários é $1+3\cdot 9\cdot(9+1) = 271 > 200$. Portanto, são necessários entre 200 e 400 canudinhos para preencher o tubo o que requer dois pacotes de 200.

(b) Se os pacotes forem de 100 canudinhos, é necessário determinar se cabem, no tubo de PVC, mais do que 300 canudinhos. A configuração com 9 camadas hexagonais tem um diâmetro de $(2\cdot 9+1)\cdot 4 = 76\,\text{mm}$, o que permite ainda alguma folga no círculo de 80 mm. E com 271 canudinhos, basta acrescentar mais 30 para ultrapassar os 300. Uma maneira de se fazer isso é acrescentar uma fileira de 5 círculos ao longo de cada um dos 6 lados da configuração hexagonal. Com nove camadas hexagonais, o lado do hexágono mais externo é formado por 10 círculos, então com o acréscimo, cada um dos lados ficaria com o aspecto da figura a seguir.



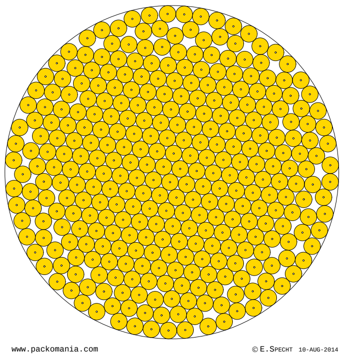
Para verificar se estes círculos acrescentados ficam dentro do círculo maior, basta observar a diagonal do retângulo que liga os centros de círculos diametralmente opostos, como indica a figura a seguir, onde foi detalhada a região próxima a um dos vértices do hexágono.



Não é difícil verificar que este retângulo tem o comprimento de 17 vezes o diâmetro do canudinho, ou seja 68 mm e sua altura é a mesma que a de um triângulo equilátero com o lado de 6 vezes o diâmetro de um canudinho, ou seja, $6 \cdot 4\sqrt{3}/2 = 12\sqrt{3}$. Assim, pelo teorema de Pitágoras, a diagonal do retângulo mede $\sqrt{68^2 + 12^2 \cdot 3} = \sqrt{5056} = \sqrt{79 \cdot 64} = 8\sqrt{79} < 8\sqrt{81} = 72$ mm. Mas a diagonal do retângulo fornece apenas a distância entre os centros dos círculos nos extremos. Acrescentando-se o raio de um círculo (2 mm) em cada extremidade, é possível concluir que os novos círculos acrescentados ficam no interior de um círculo com 76 mm de diâmetro e centrado no centro do hexágono original. Portanto, cabem mais que 300 canudinhos e menos que 400 no tubo de PVC, sendo necessários quatro pacotes de 100 canudinhos.

Observações: Esta questão está relacionada a uma classe importante de problemas matemáticos conhecidos como problemas de empacotamento. Neste caso particular de empacotamento de círculos de mesmo diâmetro dentro de um círculo maior, geralmente procura-se determinar o raio mínimo do círculo maior que permita colocar em seu interior, sem sobreposição, um certo número, n de círculos menores de raio unitário ou, equivalentemente, o raio máximo dos n círculos menores que permita empacotá-los em um círculo unitário. Em geral este é um problema muito difícil de se resolver, porque à medida em que n aumenta, também aumentam as possíveis maneiras de se distribuir os círculos menores e não há como garantir que uma configuração que parece ser a melhor seja de fato. Segundo o interessante website www.packomania.com, que lista o menor valor conhecido da razão entre os raios para cada n de um a 2989, atualmente só são conhecidas soluções definitivas para $n \leq 13$ e $n = 19$, que são valores surpreendentemente pequenos. Além disso, o Pakomania tem uma vasta coleção de dados sobre diversos tipos de empacotamento de círculos e esferas. Para o tipo de problema considerado nesta questão da OMEG, basta escolher a opção “circles in a circle”. Na seção “Applications”, é possível fornecer os diâmetros do círculo maior e do menor e o site calcula quantos círculos é possível empacotar nestas condições, mostrando o diagrama de uma possível distribuição dos círculos. Entrando com 80 para o diâmetro maior e 4 para o menor (ou 20 e 1, respectivamente), que é a situação do problema da OMEG, e clicando o botão “Let’s go” obtém-se uma configuração que coloca

338 canudinhos no cano de PVC com a disposição indicada na figura a seguir.



Outro resultado interessante é que na resolução desta questão obtivemos uma configuração que permite colocar 301 círculos (271 obtidos no item **(a)** mais 30 acrescentados no item **(b)**) com 4 mm de diâmetro no interior de um círculo com 76 mm e a melhor solução obtida pelo algoritmo do Packomania, para esta relação entre os diâmetros, consegue colocar 304 círculos, o que é apenas 1% a mais, mostrando que, sendo o diâmetro do círculo maior 19 vezes o do menor, a configuração aqui proposta já aproveita muito bem o espaço e deixa pouca margem para ser melhorada.

Rogerio de Queiroz Chaves, Valdivino Vargas Junior,
Marcelo Almeida de Souza, Anyelle Nogueira de Souza

Endereço: Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Caixa Postal 131
74001-970 - Goiânia - GO - Brasil
rogerio@ufg.br, vvjunhior@ufg.br,
msouza@ufg.br, anyelle@ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 9, setembro de 2014, 33-43

O Número Mágico M

Eudes Antonio Costa e Élis Gardel da Costa Mesquita

Resumo. O interesse em aprender pode ser despertado no aluno através de jogos (enigmas, truques, mágicas etc.) que harmonizam conhecimento e prática dos conceitos passados em sala de aula. Neste apresentamos uma generalização para o algoritmo do número mágico 1089 que apareceu em Ball [1] e em [2, RPM 80] e exibimos ainda algumas propriedades.

1. 1089 é um Número Mágico

Alguns matemáticos entendem que o ensino da matemática deve dar uma maior importância aos jogos, dizem ainda que os jogos são atividades que têm muito em comum com a própria atividade matemática. Um aspecto positivo nos jogos é que não existe "medo de errar", pois o erro é encarado como um degrau necessário para chegar a uma resposta correta. Normalmente enigmas com números fascinam a todos; pois são simples e muitas regras reduzem-se a operações aritméticas. Neste procuramos explorar o número **Mágico** 1089, que conforme Ball [1, pág. 48] satisfaz o algoritmo abaixo:

Algoritmo 1. [1, 2005, pág 48] O Número Mágico 1089 .

1. Considere um número inteiro positivo composto por três algarismos distintos $x_3 = a_2a_1a_0$ e $a_2 \neq 0$;

2. Escreva o número x_3 ao "contrário" e obtenha o número $x_3' = a_0a_1a_2$.

3. Encontre a diferença do maior para o menor obtendo um novo número, representado por $y_3 = |x_3 - x_3'| = b_2b_1b_0$ (O qual deve-se considerar como um número de três algarismos, mesmo quando o algarismo na casa das centenas for zero.).

4. Escreva o numero y_3 ao "contrário" $y_3' = b_0b_1b_2$.

5. Faça $y_3 + y_3'$ e obterá sempre o número 1089.

Inicialmente duas perguntas:

Questão 1. Por que o número 1089 é **Mágico**?

Questão 2. Apenas o número 1089 é "mágico"?

Exemplo 1. Dado o número $x_3 = a_2a_1a_0 = 843$ com os 3 algarismos (dois à dois) distintos, seguindo os passos do algoritmo obtém-se 1089. Vejamos:

$$843 - 348 = 495,$$
$$495 + 594 = 1089.$$

Segundo o algoritmo de Ball (algoritmo 1), *um número é considerado mágico se ele for o resultado do procedimento (leia: algoritmo) anterior.* Assim o número 1089 é **Mágico**, pois satisfaz o algoritmo 1.

Mesmo entendendo o que significa falar que 1089 é um número "mágico", resta-nos entender por que tal propriedade ocorre, ou seja, por que seguindo o procedimento (algoritmo) o resultado é sempre 1089.

2. Desvendando a Mágica

Primeiramente, lembramos que pelo nosso sistema de numeração **posicional decimal** escrevemos os números como uma adição de parcelas de potência de 10 multiplicadas por números de um algarismo. Por exemplo, o número 15.495 pode ser descrito como $1 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10 + 5 \times 10^0$.

Sejam agora a_2, a_1, a_0 os algarismos dois à dois distintos do número escolhido. Considerando $a_2 > a_0$, para fazer a subtração $a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2$ devemos escrever:

$$a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 = (a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0) - (a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2).$$

Por termos $a_0 < a_2$, necessitamos reescrever deslocando uma dezena de $a_1 \times 10$ para a unidade a_0, assim:

$$a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 = [a_2 \times 10^2 + (a_1 - 1)10 + (a_0 + 10)] - [a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2].$$

Agora, deslocamos uma centena de $a_2 \times 10^2$ para $(a_1 - 1)10$ por ser menor que $a_1 \times 10$. Assim,

$$\begin{aligned} a_2a_1a_0 - a_0a_1a_2 &= [(a_2 - 1) \times 10^2 + ((a_1 - 1)10 + 10^2) + \\ &\quad + (a_0 + 10)] - [a_0 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_2] \\ &= (a_2 - a_0 - 1) \times 10^2 + 9 \times 10 + (a_0 - a_2 + 10) \\ &= b_2b_1b_0. \end{aligned}$$

O próximo passo é considerar o número $b_2b_1b_0$ (resultado da subtração) e adicionar ao seu contrário $b_0b_1b_2$ (ordem dos algarismos invertidos). Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned} b_2b_1b_0 + b_0b_1b_2 &= [(a_2 - a_0 - 1) \times 10^2 + 9 \times 10 + (a_0 - a_2 + 10)] + \\ &\quad + [(a_0 - a_2 + 10) \times 10^2 + 9 \times 10 + (a_2 - a_0 - 1)] \\ &= (a_2 - a_0 - 1 + a_0 - a_2 + 10)10^2 + (9 + 9)10 + \\ &\quad + (a_0 - a_2 + 10 + a_2 - a_0 - 1) \\ &= 9 \times 10^2 + (10 + 8)10 + 9 = 1089. \end{aligned}$$

Portanto não importando qual número escolhido, formado por três algarismos (dois à dois) distintos, os cálculos efetuados sempre conduzem a 1089. Assim o número 1089 é considerado “mágico” por esta razão. Consequentemente a primeira pergunta está respondida.

Vejamos o seguinte exemplo, em que o número $x_3 = a_2a_1a_0$ não tenha os 3 algarismos (dois à dois) distintos.

Exemplo 2. Dado o número $x_3 = a_2a_1a_0 = 443$ formado por 3 algarismos, com $a_2 \neq a_0$, seguindo o algoritmo 1, também obtemos o número mágico 1089, vejamos:

$$\begin{aligned} 443 - 344 &= 099, \\ 099 + 990 &= 1089. \end{aligned}$$

Conforme exibido no exemplo 2 o algoritmo ainda é válido desde que tenhamos $a_2 \neq a_0$. Veja ainda que na justificativa anterior, dado um número $x_3 = a_2a_1a_0$, não usamos o fato de os três algarismos a_2, a_1, a_0 serem dois à dois distintos, apenas que $a_2 \neq a_0$.

Na RPM 80 [2, 2013] (Pág. 23, Painel II) exibimos a justificativa anterior para tal algoritmo, foi ainda proposto como desafio encontrar outros números mágicos para o algoritmo acima, ou seja, se o algoritmo funciona (retorna um número diferente de zero) para um número x_n qualquer formado por n algarismos. Na verdade estamos interessados em descobrir outros números mágicos além de 1089.

3. Gerando outros Números Mágicos

Considere um número inteiro positivo x_n constituído de n algarismos, isto é, um número do tipo $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0$, com $n \geq 2$ e $a_{n-1} \neq 0$. Estamos interessados em determinar condições para que o algoritmo funcione, isto é, retorne um número M não nulo. Assim estamos considerando o seguinte algoritmo:

Algoritmo 2. Um Número Mágico M.

1. Considere um número $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0$ (inteiro positivo) qualquer composto por n algarismos, para $n \geq 2$ e $a_{n-1} \neq 0$.

2. Escreva o número ao "contrário" obtendo o $x'_n = a_0a_1\cdots a_{n-2}a_{n-1}$.

3. Encontre a diferença entre o maior e o menor obtendo um novo número, representado por $y_n = |x_n - x'_n| = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_2b_1b_0$ (O qual deve-se considerar como um número de n algarismos, mesmo quando o algarismo b_{n-1} for zero.).

4. Escreva o número y_n ao "contrário", isto é, $y'_n = b_0b_1\cdots b_{n-2}b_{n-1}$.

5. Escreva o número (mágico) $M = y_n + y'_n$.

Um número $M \neq 0$ é considerado **Mágico** se ele for o resultado do procedimento (algoritmo) anterior. Por exemplo, se $n = 2$ temos um número inicial $x_2 = a_1a_0$, com $a_1 \neq a_0$, é fácil mostrar que 99 é o número mágico. Para $n = 3$ com $a_2 \neq a_0$ já conhecemos que 1089 é o número mágico.

A seguir apresentamos uma lista com **Números Mágicos** para um número x_n formado por n algarismos com $2 \leq n \leq 6$.

4. Lista de Números Mágicos

Dado um número x_n (inteiro positivo) qualquer composto por n algarismos da forma $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0$, com $2 \leq n \leq 6$. Consideramos $x_n > x_n'$.

n		Condição	Nº Mágico
2	$x = a_1a_0$	$a_1 > a_0$	99
3	$x = a_2a_1a_0$	$a_2 > a_0$	1089
4	$x = a_3a_2a_1a_0$	$a_3 = a_0$ e $a_2 > a_1$	990
		$a_3 > a_0$ e $a_2 < a_1$	9999
		$a_3 > a_0$ e $a_2 > a_1$	10890
		$a_3 > a_0$ e $a_2 = a_1$	10989
5	$x = a_4a_3a_2a_1a_0$	$a_4 = a_0$ e $a_3 > a_1$	10890
		$a_4 > a_0$ e $a_3 < a_1$	99099
		$a_4 > a_0$ e $a_3 > a_1$	109890
		$a_4 > a_0$ e $a_3 = a_1$	109989
6	$x = a_5a_4a_3a_2a_1a_0$	$a_5 = a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 < a_2$	99990
		$a_5 = a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 > a_2$	108900
		$a_5 = a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 = a_2$	109890
		$a_5 = a_0$ e $a_4 = a_1$ e $a_3 > a_2$	9900
		$a_5 > a_0$ e $a_4 < a_1$ e $a_3 < a_2$	1089990
		$a_5 > a_0$ e $a_4 \geq a_1$ e $a_3 > a_2$	1098900
		$a_5 > a_0$ e $a_4 > a_1$ e $a_3 = a_2$	1099890
		$a_5 > a_0$ e $a_4 < a_1$ e $a_3 > a_2$	999999
		$a_5 > a_0$ e $a_4 < a_1$ e $a_3 < a_2$	991089
		$a_5 > a_0$ e $a_4 < a_1$ e $a_3 = a_2$	990099
		$a_5 > a_0$ e $a_4 = a_1$ e $a_3 = a_2$	1099989
		$a_5 > a_0$ e $a_4 = a_1$ e $a_3 < a_2$	1090089

Na próxima seção apresentamos algumas propriedades dos números mágicos.

5. Algumas Propriedades

Afirmação 1. *Considere $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$ para n par, ou seja,*

$$x_n = a_{2k-1}a_{2k-2}\cdots a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0.$$

O número mágico M existe (é distinto de zero) desde que uma das condições ocorra:

$$a_{2k-1} \neq a_0 \text{ ou } a_{2k-2} \neq a_1 \text{ ou } \cdots \text{ ou } a_{k+1} \neq a_{k-2} \text{ ou } a_k \neq a_{k-1}.$$

Afirmação 2. *Considere $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$ para n ímpar, ou seja,*

$$x_n = a_{2k}a_{2k-1}\cdots a_{k+2}a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0.$$

O número mágico M existe (é distinto de zero) desde que uma das condições ocorra:

$$a_{2k} \neq a_0 \text{ ou } a_{2k-1} \neq a_1 \text{ ou } \cdots \text{ ou } a_{k+2} \neq a_{k-2} \text{ ou } a_{k+1} \neq a_{k-1}.$$

Afirmação 3. *Todo número mágico M é da forma $99q$, para $q = 1$ ou $q \geq 10$.*

As duas primeiras afirmações são sobre a existência do número mágico M, não nulo, para um número inicial x_n com $n \geq 2$. A última afirma que M é múltiplo de 99.

De agora em diante, sem perda de generalidade, admitamos que $x_n > x'_n$ e assim $y_n = x_n - x'_n$, caso contrário tomamos $y_n = x'_n - x_n$.

6. Demonstração das Afirmações 1 e 2

Demonstração: da Afirmação 1

Para mostrarmos que M não nulo existe para um certo número inicial x_n, com uma quantidade par de algarismos, basta mostrarmos que $y_n = x_n - x'_n$ é não nulo, visto que se $y_n \neq 0$ teremos que $y'_n \neq 0$ e por consequência $M = y_n + y'_n \neq 0$.

Sendo x_n da forma

$$x_n = a_{2k-1}a_{2k-2}\cdots a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1a_0,$$

isto é, com uma quantidade par de algarismos $a_i, 0 \leq a_i \leq 9$. Então

$$x'_n = a_0a_1\cdots a_{k-1}a_k\cdots a_{2k-2}a_{2k-1}.$$

Se $a_{2k-1} \neq a_0$ então já teremos $y_n = x_n - x'_n \neq 0$, caso contrário temos $a_{2k-1} = a_0$. No caso em que $a_{2k-1} = a_0$, se tivermos $a_{2k-2} \neq a_1$ então $y_n = x_n - x'_n \neq 0$, caso contrário temos também $a_{2k-2} = a_1$. Seguindo este raciocínio obtemos que $y_n = 0$ apenas quando

$$a_{2k-1} = a_0 \text{ e } a_{2k-2} = a_1 \text{ e } \cdots \text{ e } a_{k+1} = a_{k-2} \text{ e } a_k = a_{k-1}.$$

O que acarretaria que $x_n = x'_n$, porém estamos admitindo $x_n > x'_n$. ∎

Procede-se de modo similar para mostrar a Afirmação 2, ou seja, a existência do número mágico M com um número inicial x_n, com uma quantidade ímpar de algarismos.

7. Demonstração da Afirmação 3

Para mostrarmos a Afirmação 3, necessitamos dos seguintes resultados auxiliares (Lemas e Proposições), com certeza vistos em um curso de Introdução à Teoria dos Números, consulte por exemplo [3].

Lema 1. Dados i, j inteiros positivos tem-se que $10^i - 10^j$ é divisível por 9.

Demonstração: Veja que $10 = 9+1$ assim temos que $10 \equiv 1 \pmod 9$, acarretando que $10^i \equiv 1 \pmod 9$ $\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, logo

$$10^i - 10^j \equiv 0 \pmod 9 \ \forall i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Portanto $10^i - 10^j$ é divisível por 9. ∎

Lema 2. Seja z_n um número inteiro com k algarismos e z'_n um número inteiro obtido de z_n permutando os algarismo. Se z_n é divisível por 9 então também o é z'_n.

Demonstração: Como no Lema 1 temos $10^i \equiv 1 \pmod 9$ $\forall i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Como o resto da divisão de um número por 9 é igual ao resto da divisão da soma de seus algarismos por 9 (Verifique). Na adição de inteiros vale a propriedades associativa e comutativa, assim a soma dos algarismos do número inteiro z_n é invariante por permutação. Logo, se z_n é divisível por 9 então também o é z'_n. ∎

Lema 3. Dados i, j inteiros positivos, com $i + j$ ímpar, tem-se que $10^i + 10^j$ é divisível por 11.

Demonstração: Como $10 = 11 - 1$ temos $10 \equiv -1 \pmod{11}$. Logo

$$10^i \equiv -1 \pmod{11} \ \forall i \text{ inteiro positivo ímpar, e}$$

$$10^j \equiv 1 \pmod{11} \ \forall j \text{ inteiro positivo par .}$$

Assim

$$10^i + 10^j \equiv 0 \pmod{11}.$$

Portanto $10^i + 10^j$ é divisível por 11, se $i + j$ for ímpar. ∎

A Afirmação 3 será consequência direta dos dois próximos resultados.

Proposição 1. Todo número mágico M é múltiplo de 9.

Demonstração: Inicialmente consideremos o número x_n da forma

$$x_n = a_{2k-1}a_{2k-2}\cdots a_{k+1}a_k a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1 a_0,$$

isto é, com uma quantidade par de algarismos a_i. Na representação decimal expandida, temos que

$$x_n = a_{2k-1}10^{2k-1}+a_{2k-2}10^{2k-2}+\cdots+a_k10^k+a_{k-1}10^{k-1}+\cdots+a_1 10^1+a_0,$$

e assim

$$x'_n = a_0 10^{2k-1}+a_1 10^{2k-2}+\cdots+a_{k-1}10^k+a_k 10^{k-1}+\cdots+a_{2k-2}10^1+a_{2k-1},$$

fazendo $y_n = x_n - x'_n$, obtemos que

$$y_n = a_{2k-1}(10^{2k-1} - 1) + a_{2k-2}(10^{2k-2} - 10^1) + \cdots + a_k(10^k - 10^{k-1})+$$
$$+a_{k-1}(10^{k-1} - 10^k) + \cdots + a_1(10^1 - 10^{2k-2}) + a_0(1 - 10^{2k-1}).$$

Do Lema 1 temos que todo inteiro $(10^i - 10^j)$ é divisível por 9, e assim obtemos que y_n é múltiplo de 9. Do Lema 2 temos que y'_n também o é, visto que y'_n possui os mesmos algarismos de y_n em posição inversa, e assim concluímos que $M = y_n + y'_n$ é divisível por 9. ∎

De modo similar obtém-se que a Proposição 1 vale para um número x_n da forma

$$x_n = a_{2k}a_{2k-1}\cdots a_{k+2}a_{k+1}a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0,$$

isto é, com uma quantidade ímpar de algarismos a_i.

Proposição 2. Todo número mágico M é múltiplo de 11.

Demonstração: Consideremos um número x_n da forma

$$x_n = a_{2k-1}a_{2k-2}\cdots a_{k+1}a_k a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_1 a_0,$$

isto é, uma quantidade par de algarismos a_i. Escrevendo $y_n = x_n - x'_n$, na representação decimal expandida, temos

$$y_n = b_{2k-1}10^{2k-1}+b_{2k-2}10^{2k-2}+\cdots+b_k 10^k+b_{k-1}10^{k-1}+\cdots+b_1 10^1+b_0,$$

$$y'_n = b_0 10^{2k-1}+b_1 10^{2k-2}+\cdots+b_{k-1}10^k+b_k 10^{k-1}+\cdots+b_{2k-2}10^1+b_{2k-1},$$

assim temos

$$\begin{aligned} M &= y_n + y'_n \\ &= b_{2k-1}(10^{2k-1}+1) + b_{2k-2}(10^{2k-2}+10^1) + \cdots + b_k(10^k+10^{k-1}) + \\ &\quad + b_{k-1}(10^{k-1}+10^k) + \cdots + b_1(10^1+10^{2k-2}) + b_1(1+10^{2k-1}). \end{aligned}$$

Sendo $2k-1$ ímpar, do Lema 3 segue que

$$(10^{2k-1}+1), (10^{2k-2}+10^1), \ldots, (10^k+10^{k-1})$$

é múltiplo de 11, e assim segue que M é divisível por 11. ■

De modo similar obtém-se que a Proposição 2 vale para um número x_n da forma

$$x_n = a_{2k}a_{2k-1}\cdots a_{k+2}a_{k+1}a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0,$$

isto é, com uma quantidade ímpar de algarismos a_i.

Demonstração da Afirmação 3.

Sendo M múltiplo de 9 (Proposição 1) e múltiplo de 11 (Proposição 2) segue que M é múltiplo de 99. E mais, para $x_2 = a_1a_0$ com $a_1 \neq a_0$, temos que existe um único número mágico, a saber o 99. Para qualquer outro número $x_n = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$, $n > 3$, temos que $M = 99q$ e claramente $q \geq 10$ pois $x_n \geq 10x_2$. Assim a Afirmação 3 está demonstrada.

8. A função $M(k)$

Consideremos o número x_{2k} ($k \geq 1$) constituído por um número par de algarismos (ou x_{2k+1} constituído por um número ímpar de algarismos), e uma função $M(k)$ que para todo k associa a quantidade de números mágicos M. Observando a tabela anterior temos que:

k	número de algarismos		$M(k)$
1	2	$x = a_1a_0$	1
	3	$x = a_2a_1a_0$	
2	4	$x = a_3a_2a_1a_0$	4
	5	$x = a_4a_3a_2a_1a_0$	
3	6	$x = a_5a_4a_3a_2a_1a_0$	12
	7	$x = a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$	

Afirmação 4. *Para todo inteiro $k \geq 2$ temos que*

$$M(k-1) \;\leq\; M(k) \;\leq\; 3^{k-1} + M(k-1).$$

Demonstração: Para todo $k \geq 2$ considere o número x_{2k}, isto é, um número x_n constituído por um número par de algarismos, assim temos

$$x_{2k} = a_{2k-1}a_{2k-2}a_{2k-3}\cdots a_{k+1}a_ka_{k-1}a_{k-2}\cdots a_2a_1a_0.$$

Inicialmente admitamos que $a_{2k-1} > a_0$, assim teremos que

$$a_{2k-2} > a_1 \text{ ou } a_{2k-2} < a_1 \text{ ou } a_{2k-2} = a_1.$$

Para cada caso acima teremos que

$$a_{2k-3} > a_2 \text{ ou } a_{2k-3} < a_2 \text{ ou } a_{2k-3} = a_2.$$

E assim sucessivamente, até $a_k > a_{k-1}$ ou $a_k < a_{k-1}$ ou $a_k = a_{k-1}$.

A quantidade de número mágico $M(k)$, quando $a_{2k-1} > a_0$, é

$$M(k) \leq 3^{k-1}.$$

Agora considerando $a_{2k-1} = a_0$ teremos no máximo $M(k-1)$ números mágicos. E concluímos o resultado. ■

De modo similar obtém-se que a Afirmação 4 vale para um número x_n da forma

$$x_n = a_{2k}a_{2k-1}\cdots a_{k+2}a_{k+1}a_k a_{k-1}\cdots a_1 a_0,$$

isto é, com uma quantidade ímpar de algarismos a_i.

Agradecimento:
Agradecemos ao amigo Claudio Ulisses (IF Goiano - Campos Belos) que fez, e nos cedeu, um programa computacional que fornece o número mágico M para qualquer número inicial x_n composto por $2 \leq n \leq 10$ algarismos.

Bibliografia

[1] Ball, Johnny. *Think of a Number*. Dorling Kinderly Limited, Great Britain, 2005.

[2] Costa, Eudes Antonio da. *Mais um Número Mágico*. Revista do Professor de Matemática (RPM), número 80, SBM, 2013.

[3] Silva, Valdir Vilmar da. *Números: Construção e Propriedades*. Editora UFG. Goiânia. 2003.

Autores: Eudes Antonio Costa e Élis Gardel da Costa Mesquita

Endereço: UNIVERSIDADE DE FEDERAL DO TOCANTINS
Curso de Matemática
77330-000 Arraias, TO, Brasil
eudes@uft.edu.br
elisgardel@uft.edu.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 9, setembro de 2014, 44-56

O Rei Maligno e a Princesa Generosa: Sobre bases numéricas e critérios de divisibilidade

Ana Paula Chaves e Thiago Porto

Resumo. Os temas centrais deste texto - bases numéricas e critérios de divisibilidade - serão apresentados de modo a resolver o seguinte problema: O Rei Maligno aprisionou o príncipe da Princesa Generosa e para salvá-lo é preciso que ela resolva um desafio proposto pelo Rei, caso contrário o príncipe será executado. O desafio consiste em adivinhar três números de dois algarismos a, b e c que o Rei escrevera secretamente nos livros oficiais do reino. Para isto, a Princesa deve fornecer três números naturais X, Y e Z, e logo depois que o Rei anunciar o valor da soma $aX + bY + cZ$, a Princesa deverá dizer os valores de a, b e c.

1. Bases Numéricas

O desenvolvimento da humanidade impôs ao homem a necessidade de contar quantidades cada vez mais numerosos. Para fazê-lo, foi necessário criar um processo no qual os números pudessem ser escritos. Este sistema consiste em escolhermos um número natural b, denominado **base**, onde um agrupamento de b unidades simples (de primeira ordem) forma uma unidade de segunda ordem; um agrupamento de b unidades de segunda ordem forma uma unidade de terceira ordem, e assim por diante. De modo particular, em nosso sistema usual b é igual a 10, e temos que 10 unidades simples formam uma dezena; 10 dezenas formam uma centena; 10 centenas formam um milhar. Desta forma, todo número natural n é escrito como

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_r 10^r \ , \tag{1.1}$$

onde $r \geq 0$ e $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, para $i = 0, 1, 2, \cdots, r$, e o representamos por $a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0$, com a_i sendo denominado um **dígito** de n. Por exemplo,

- $2035 = 5 + 3 \cdot 10 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3$;
- $134507 = 7 + 0 \cdot 10 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^5$.

Contudo, o papel desempenhado pelo 10 em nosso sistema de numeração é uma conveniência, uma vez que existe a liberdade na escolha da definição do valor da base, como mostra o resultado a seguir.

Teorema 1. Sejam b um número natural e $M = \{0, 1, 2, \cdots, b-1\}$, com $b > 1$. Todo número natural n pode ser representado univocamente da seguinte maneira:

$$n = a_0 + a_1.b + a_2.b^2 + \cdots + a_r b^r,$$

onde $r \geq 0$, $a_i \in M$, com $i = 0, 1, \cdots, r$ e $a_r \neq 0$.

Demonstração 2. A existência da representação é garantida por meio do segundo princípio de indução. Se $n < b$, então coloque $a_0 = n$, e a representação está definida. Suponhamos que $n \geq b$ e que para todo q, com $1 \leq q < n$, tal representação seja possível.

Pelo Algoritmo da Divisão de Euclides, temos que $n = bq + a_0$, com $a_0 \in M$. Observe que $q < n$, pois caso contrário teríamos

$$n = bq + a_0 \geq bq > q \geq n,$$

o que é uma contradição.

Dessa maneira, aplicando a hipótese de indução para q, temos que ele possui uma representação na base b, ou seja,

$$q = a_1 + a_2 b + \cdots + a_r b^{r-1},$$

com $a_i \in M$ e $a_r \neq 0$. Logo,

$$n = b(a_1 + a_2 b + \cdots + a_r b^{r-1}) + a_0 = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^r,$$

o que conclui a existência da representação.

A unicidade será garantida também por meio do segundo princípio de indução. Caso $n < b$, temos que a unicidade é obtida trivialmente.

Assim, suponhamos que $n \geq b$ e que a unicidade é válida para todo q, com $1 \leq q < n$. E ainda, que n possua duas representações, ou seja,

$$n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_r b^r = c_0 + c_1 b + \cdots + c_s b^s,$$

com $a_i, c_j \in M$, com $i = 0, 1, \cdots, r$ e $j = 0, 1, \cdots, s$. Logo,

$$n = b(a_1 + a_2 b + \cdots + a_r b^{r-1}) + a_0 = b(c_1 + c_2 b + \cdots + c_s b^{s-1}) + c_0.$$

Como $b > a_0$ e $b > c_0$, pela unicidade do Algoritmo de Euclides obtemos que $a_0 = c_0$ e $a_1 + a_2 b + \cdots + a_r b^{r-1} = c_1 + c_2 b + \cdots + c_s b^{s-1} = q$. Como $q < n$, segue pela hipótese de indução que $r = s$, visto que $r - 1 = s - 1$, e $a_1 = c_1, \cdots, a_r = c_r$. Portanto a representação é única.

Observação: Cada um dos elementos do conjunto M é denominado **algarismo** do sistema posicional de base b. E ainda, denotamos o número $n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_r b^r$ por $(a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0)_b$.

2. Primeiros Critérios de divisibilidade

Agora que já estamos familiarizados com o conceito de base numérica, podemos introduzir os critérios de divisibilidade. Esses critérios funcionam como regras práticas para decidir se um certo número é múltiplo, ou não, de um outro escolhido previamente. Para tal, começamos definindo

Definição 3. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Dizemos que "a é divisível por b", e escrevemos $b|a$, se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = k \cdot b$.

Exemplo 4. O número 10 é divisível por 2, já que $10 = 5 \times 2$. Pelo mesmo motivo, 10 também é divisível por 5.

Podemos então perguntar-nos o seguinte: Há alguma regra, um **critério**, que nos diga, sem precisarmos decompor, se um certo número é divisível por 2? E por 5? Nossos esforços imediatos são no intuito de responder à estas duas perguntas. Por hora, vamos nos restringir aos critérios para números na base 10. Sendo assim, consideremos

$$\begin{array}{ll}
2 \times 0 = 0 & 2 \times 5 = 10 = 10 + 0 \\
2 \times 1 = 2 & 2 \times 6 = 12 = 10 + 2 \\
2 \times 2 = 4 & 2 \times 7 = 14 = 10 + 4 \\
2 \times 3 = 6 & 2 \times 8 = 16 = 10 + 6 \\
2 \times 4 = 8 & 2 \times 9 = 18 = 10 + 8
\end{array}$$

Note que nesta tabela, com os dez primeiros múltiplos de 2, todos os números são a soma de um múltiplo de 10 com um dos números: 0, 2, 4, 6, ou 8. Vamos mostrar que isso não ocorre por acaso, ou seja, que qualquer número par possui essa propriedade:

Seja n par, ou seja $n = 2m$, onde $m \in \mathbb{N}$. Por (1.1), podemos escrever m da forma

$$m = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_r 10^r \Rightarrow m = M \times 10 + a_0 \ ,$$

com $a_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, e assim temos que

$$n = 2(M \times 10 + a_0) = 2M \times 10 + 2a_0 \ ,$$

onde $2a_0$ é um dos números da tabela acima, portanto n é um múltiplo de 10 somado com um dos números: 0, 2, 4, 6 ou 8. Em outras palavras, o algarismo das unidades de n é 0, 2, 4, 6 ou 8.

Agora, nos resta mostrar a recíproca do que acabamos de provar, ou seja, que se um número tem como algarismo das unidades 0, 2, 4, 6 ou 8, então este número é par. De fato, vamos escrever $n = N \times 10 + a_0$, onde $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Então, é imediato que $a_0 = 2b_0$, onde $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Desta forma,

$$n = N \times 10 + 2b_0 \Rightarrow n = 2 \times (5N + b_0) \ ,$$

donde n é par. Assim, acabamos de demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 5 (Critério de divisibilidade por 2)**.** Um número é divisível por 2 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é par.

Com o mesmo espírito da demonstração do Teorema 5, seja n um número natural com $n = 10m + n_0$, onde $n_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ é o dígito das unidades de n. Se tivermos n divisível por 5, então podemos escrever $n = 5k$, donde substituindo em $n = 10m + n_0$, obtemos

$$5k = 10m + n_0 \ \Rightarrow \ n_0 = 5k - 10m \ \Rightarrow \ n_0 = 5(k - 2m) \ ,$$

ou seja, n_0 também é divisível por 5. Só que os únicos valores possíveis para n_0 que são divisíveis por 5 são: $n_0 = 5$ ou $n_0 = 0$. Reciprocamente, se $n_0 = 5$ ou $n_0 = 0$, substituindo em $n = 10m + n_0$ nos dá $n = 5(2m+1)$ ou $n = 5(2m)$, o que, em qualquer um dos casos, nos diz que n é divisível por 5. Portanto, mostramos que:

Teorema 6 (Critério de divisibilidade por 5)**.** Um número é divisível por 5 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é 0 ou 5.

O Teorema 5 resolve completamente o critério para decidir qual a paridade de um número na base 10. Agora, iremos investigar a paridade de números representados em outras bases. Começamos exemplificando com números na base 3, ou seja, escrevemos

$$n = a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + \cdots + a_r 3^r \ ,$$

onde $a_i \in \{0, 1, 2\}$, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, r$. Se n é par, então devemos ter uma quantidade par de dígitos iguais a 1. De fato, podemos escrever a soma acima "agrupando" as potências de cada dígito, como segue

$$n = 0 \times (SP_0) + 1 \times (SP_1) + 2 \times (SP_2) \ , \tag{1.2}$$

onde $SP_i =$ *Soma das Potências cujo dígito é igual a i.* Ou seja,

$$SP_1 = n - 2 \times (SP_2) \ ,$$

e usando que $n = 2k$, obtemos $SP_1 = 2(k - SP_2)$, donde SP_1 é uma soma de potências de 3 resultando em um número par, e portanto a quantidade de parcelas nesta soma deve ser par. Assim, a quantidade de dígitos iguais a 1 deve ser par. Reciprocamente, se a quantidade de dígitos iguais a 1 é par, então a igualdade (1.2) nos dá que n é a soma de 3 parcelas pares, donde é um número par. Concluímos então que a soma dos dígitos de n deve ser par! Resumindo:

Um número na base 3 é divisível por 2 se, e somente se, a soma dos seus dígitos é par.

Tendo em vista generalizar este resultado, seja

$$n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \cdots + a_r b^r \ ,$$

escrito na base b, com $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, r$. Temos dois casos possíveis: b é par ou ímpar.

Se b é par, então $b = 2k$, donde

$$n = b \cdot m + a_0 \ \Rightarrow \ n = 2k \cdot m + a_0 \ .$$

Assim, se n é par, temos que a_0 também é par. Reciprocamente, se a_0 é par, temos que n também é par, donde concluímos este caso.

Se b é ímpar, usamos o mesmo raciocínio visto quando $b = 3$, e separamos a expansão na base b na soma das potências cujos dígitos são pares e ímpares:

$$n = SP + SI \ .$$

Como a soma SP é par, escrevemos $SP = 2K$, donde

$$n = 2K + SI \ . \tag{1.3}$$

Desta forma, se $n = 2k$, temos $2k = 2K + SI \ \Rightarrow \ SI = 2(k - K)$, ou seja a soma de parcelas ímpares resulta em um número par, portanto devemos ter uma quantidade par de parcelas ímpares. A recíproca é imediata por (1.3). Portanto, com uma quantidade par de dígitos ímpares, a soma dos dígitos de n também é par!

Com isso, encontramos um critério para decidir sobre a paridade de um determinado número escrito em qualquer base:

Teorema 7 (Critério de divisibilidade por 2 em uma base qualquer)**.** Seja $n \in \mathbb{N}$ escrito na base b. Então:

(a) Caso b seja par, então n é par se, e somente se, o seu dígito das unidades é par.

(b) Caso b seja ímpar, então n é par se, e somente se, a soma dos seus dígitos é par.

Nesse momento, temos o interesse em caracterizar quando um número natural n, escrito na base 10, é divisível por 10. Pelo Teorema 1, n pode ser escrito como: $n = 10q + a_0$, onde $q \in \mathbb{N}$ e $a_0 \in M = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 9\}$. Como queremos n divisível por 10, segue que $n = 10k$, com $k \in \mathbb{N}$. Logo,

$$10k = 10q + a_0 \Rightarrow a_0 = 10(k - q),$$

ou seja, a_0 é divisível por 10, donde segue, que $a_0 = 0$, visto que $a_0 \in M$. É imediato, concluir que se $a_0 = 0$, temos que n é divisível por 10. Dessa maneira, segue o resultado.

Teorema 8 (Critério de divisibilidade por 10)**.** Um número natural n é divisível por 10 se, e somente se, o seu algarismo das unidades é 0.

Agora, discutiremos a divisibilidade de um número natural por 100. Pelo Teorema 1, $n = 10^2q+10a_1+a_0$, com $a_1, a_0 \in M = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$. Se n é múltiplo de 100, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, $n = 100k$. Logo,

$$100k = 100q + 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_0 = 10(10k - 10q + a_1),$$

ou seja, a_0 é múltiplo de 10, e isto nos leva a $a_0 = 0$, visto que $a_0 \in M$. Assim, na igualdade anterior, obtemos

$$100k = 100q + 10a_1 \Rightarrow 10k = 10q + a_1,$$

donde segue, que $a_1 = 0$. Logo, se n é divisível por 100, então os seus dois últimos algarismos são zeros. É fácil ver que se os dois últimos algarismos de n são zeros, então n é divisível por 100, e assim, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 9 (Critério de divisibilidade por 100)**.** Um número natural n, escrito na base 10, é divisível por 100 se, e somente se, os algarismos da unidade e dezena são zero. Isto é, se $n = (a_ra_{r-1}\dots a_1a_0)_{10}$, então $a_1 = a_0 = 0$.

E como decidir se um número natural n é divisível por 25. De maneira bastante semelhante, recorremos ao Teorema 1, e vemos que n pode ser escrito da seguinte maneira: $n = 10^2q+10a_1+a_0 = 25(4q)+10a_1+a_0$, com $a_1, a_0 \in M = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Como queremos n divisível por 25, segue que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 25k$. Logo,

$$25k = 25(4q) + 10a_1 + a_0 \Rightarrow a_0 = 5[5k - 5(4q) - 2a_1], \tag{1.4}$$

ou seja, a_0 é múltiplo de 5, e isto nos leva a concluir, que $a_0 = 0$ ou 5, visto que $a_0 \in M$. Se $a_0 = 0$, obtemos por (1.4) que

$$25k = 25(4q) + 10a_1 \Rightarrow 10a_1 = 25(k - 4q),$$

ou seja, $10a_1$ é múltiplo de 25, e isto só acontece quando $a_1 = 0$ ou 5, visto que $a_1 \in M$. Se $a_0 = 5$, em (1.4) temos que

$$25k = 25(4q) + 10a_1 + 5 \Rightarrow 10a_1 + 5 = 25(k - 4q)$$

isto é, $10a_1 + 5$ é múltiplo de 25, donde segue, $a_1 = 2$, pois $a_1 \in M$. Assim, se n é divisível por 25, então os dois últimos algarismos de n são 00, 25 ou 50. De modo imediato concluímos que se n termina em 00, 25 ou 50, então n é divisível por 25. Daí, segue o resultado.

Teorema 10 (Critério de Divisibilidade por 25)**.** Um número natural n é divisível por 25 se, e somente se, os dois últimos algarismos de n são 00, 25 ou 50.

Estabelecemos três critérios de divisibilidade por números que são: o próprio valor da base considerada (10), uma potência da base (100) e uma potência de um divisor da base (25). O próximo resultado apresenta critérios semelhantes para uma base b dada.

Teorema 11. Considere n um número natural escrito na base b, isto é, $n = a_0+a_1b+a_2b^2+\cdots+a_rb^r$, com $r \neq 0$ e $a_j \in M = \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$, para $j = 0, 1, 2, \ldots, r$. Seja d um divisor de b. Assim, valem os seguintes critérios:

(a) n é divisível por b se, e somente se, o algarismo das unidades de n, na base b, é zero.

(b) n é divisível por b^t, com $t \in \mathbb{N}$ e $1 \leq t \leq r$ se, e somente se, os últimos t algarismos de n,na base b, são zero.

(c) n é divisível por d^t, com $t \in \mathbb{N}$ e $1 \leq t \leq r$ se, e somente se, $a_0 + a_1b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1}$ for divisível por d^t.

Demonstração 12. (a) Como n está escrito na base b segue que $n = a_0+bk$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Por hipótese, n é divisível por b, logo $n = bv$, para algum $v \in \mathbb{N}$. Logo, temos

$$bv = a_0 + bk \Rightarrow a_0 = b(v - k),$$

ou seja, a_0 é múltiplo de b. Contudo $a_0 \in M$, logo $a_0 = 0$, isto é, o algarismo das unidades de n, na base b, é zero. A recíproca é imediata.

(b) Temos que $n = a_0 + a_1b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1} + b^tq$, para algum $t \in \mathbb{N}$, com $1 \leq t \leq r$ e $q \in \mathbb{N}$. Supondo, que n é divisível por b^t, temos que, $n = b^tk$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Daí, segue que

$$b^tk = a_0 + a_1b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1} + b^tq \Rightarrow a_0 = b(b^{t-1}k - a_1 - \cdots - b^{t-1}q), \tag{1.5}$$

isto é, a_0 é múltiplo de b. Dessa maneira, visto que $a_0 \in M$, obtemos $a_0 = 0$.

Assim, a partir do lado esquerdo de (1.5), obtemos que

$$b^tk = a_1b+\cdots+a_{t-1}b^{t-1}+b^tq \Rightarrow b^{t-1}k = a_1+a_2b+\cdots+a_{t-1}b^{t-2}+b^{t-1}q,$$

e daí, obtemos que a_1 é múltiplo de b. Como $a_1 \in M$, segue que $a_1 = 0$.

Repetindo este processo, $t-2$ vezes, obtemos que $a_2 = \cdots = a_{t-1} = 0$. Dessa maneira, os últimos t algarismos de n, na base b, são iguais a zero. A recíproca é imediata.

(c) Num sentido, temos que n pode ser colocado da seguinte maneira $n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1} + b_t q$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Como d é um divisor de b, segue que $b = dc$, para algum $c \in \mathbb{N}$. Logo, podemos reescrever a expressão de n, isto é,

$$n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1} + (dc)^t q = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1} + d^t c^t q.$$

Suponhamos n divisível por d^t, onde d é um divisor de b, logo existe $v \in \mathbb{N}$ tal que $n = d^t v$. Dessa maneira, obtemos

$$d^t v = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1} + d^t c^t q \Rightarrow a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1} = d^t(v - c^t q),$$

isto é, $a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1}$ é múltiplo de d^t.

Reciprocamente, temos que $n = a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1} + b^t q$, para algum $q \in \mathbb{N}$. Como d é divisor de b e, por hipótese, $a_0 + a_1 b + \cdots + a_{t-1}b^{t-1}$ é múltiplo de d^t, obtemos que n é divisível por d^t.

3. Mais alguns critérios

Retornemos à escrita na base 10 para conseguir mais alguns critérios de divisibilidade. Primeiro, note que

$10 - 1 = 9 = 1 \times 9,$

$10^2 - 1 = 100 - 1 = 99 = 11 \times 9,$

$10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999 = 111 \times 9,$

$10^4 - 1 = 10000 - 1 = 9999 = 1111 \times 9.$

Generalizando, temos para $n \in \mathbb{N}$,

$$10^n - 1 = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ vezes}} \times 9\ .$$

Ou seja, todos os números da forma $10^n - 1$ são divisíveis por 9 (donde também são divisíveis por 3).

Tome um número n escrito na base 10 como segue,

$$n = a_r 10^r + \cdots + a_1 10 + a_0 \ .$$

Se subtraímos de n a soma dos seus dígitos, ou seja $a_r + a_{r-1} + \cdots + a_0$, obtemos pela igualdade acima,

$$\begin{aligned} n - (a_r + \cdots + a_0) &= a_r 10^r - a_r + \cdots + a_1 10 - a_1 + a_0 - a_0 \\ &= (10^r - 1)a_r + \cdots + (10 - 1)a_1 \ . \end{aligned}$$

Então, pela nossa observação inicial, o lado direito da igualdade é sempre divisível por 9 (logo, por 3). Portanto, se n for um múltiplo de 9, ou seja, da forma $n = 9k$, teremos

$$a_r + \cdots + a_0 = 9k - (10^r - 1)a_r - \cdots - (10 - 1)a_1 \ ,$$

donde a soma dos dígitos também é divisível por 9. Reciprocamente, se a soma dos dígitos é divisível por 9, ou seja, da forma $a_r + \cdots + a_0 = 9k'$, temos

$$n = (10^r - 1)a_r + \cdots + (10 - 1)a_1 + 9k' \ ,$$

portanto, n também é divisível por 9. Note que estes dois argumentos, também são válidos se supomos que n ou $a_r + \cdots + a_0$ são múltiplos de 3. Logo, acabamos de mostrar o seguinte critério:

Teorema 13 (Critério de Divisibilidade por 3 ou 9)**.** Um número natural n é divisível por 3 ou 9 se, e somente se, a soma dos seus dígitos for divisível por 3 ou 9, respectivamente.

O resultado acima nos dá um critério um pouco *estranho*, pois, diferente dos critérios obtidos anteriormente, ele nos diz que para sabermos se um número é divisível por 3 ou 9, devemos decidir se um outro é múltiplo de 3 ou 9. Em que isso nos ajuda? Em primeiro lugar, o número obtido com a soma dos dígitos é bem menor do que o número original. Ainda se a soma dos dígitos for um número grande, podemos aplicar o teorema novamente, obtendo um número consideravelmente menor, e assim sucessivamente até encontrar um número que seja *fácil* de decidir se é múltiplo de 9 ou 3.

Um outro critério bastante interessante e *exótico* é o de divisibilidade por 11. Como já fizemos anteriormente, começamos observando o seguinte:

$10 = 11 \times 1 - 1,$

$10^2 = 99 + 1 = 11 \times 9 + (-1)^2,$

$10^3 = 1001 - 1 = 11 \times 91 + (-1)^3,$

$10^4 = 9999 + 1 = 11 \times 909 + (-1)^4.$

Generalizando, temos o seguinte Lema, que será demonstrado por indução:

Lema 14. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $10^n = 11 \times q_n + (-1)^n$, onde $q_n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, qualquer potência n-ésima de 10 pode ser escrita como a soma de um múltiplo de 11 com a potência $(-1)^n$.

Demonstração 15. O caso base da indução já foi verificado com a nossa observação. Para a hipótese de indução, temos que $10^k = 11 \times q_k + (-1)^k$, donde

$$\begin{aligned}
10^{k+1} &= 10 \cdot 10^k \\
&= 10 \cdot \left(11 \times q_k + (-1)^k\right) \\
&= 11 \cdot (10q_k) + 10 \cdot (-1)^k \\
&= 11 \cdot (10q_k) + (11 - 1) \cdot (-1)^k \\
&= 11 \cdot \underbrace{\left(10q_k + (-1)^k\right)}_{= q_{k+1}} + (-1)^{k+1} , \\
\therefore \quad 10^{k+1} &= 11 \times q_{k+1} + (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

e concluímos a demonstração.

Tendo este resultado em mãos, podemos mostrar facilmente como determinar se um dado número na base 10 é divisível ou não por 11. Na realidade, encontramos uma regra bastante similar à de divisibilidade por 3 ou 9. Tome um número n escrito na base 10,

$$n = a_r 10^r + \cdots + a_1 10 + a_0 \ .$$

Usando o Lema anterior, vamos substituir as potências n-ésimas de 10 por múltiplos de 11 somados com potências n-ésimas de -1:

$$\begin{aligned}
n &= a_r \left(11 \times q_r + (-1)^r\right) + \cdots + a_1(11 \times 1 - 1) + a_0 \\
&= 11 \times (a_r q_r + a_{r-1} q_{r-1} + \cdots + a_2 q_2 + a_1) \\
&\quad + a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^r a_r \ .
\end{aligned}$$

Desta forma, se tivermos n um múltiplo de 11, então, pela igualdade acima, teremos $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^r a_r$ também divisível por 11. Reciprocamente, se $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^r a_r$ é múltiplo de 11, então de imediato conseguimos que n é divisível por 11. Assim, provamos o seguinte critério:

Teorema 16 (Critério de Divisibilidade por 11)**.** Um número natural n é divisível por 11 se, e somente se, quando somamos os seus dígitos de ordem par e subtraímos os dígitos de ordem ímpar, o resultado é divisível por 11.

Novamente, conseguimos um critério que nos diz que para decidirmos se um certo número é divisível por 11, devemos saber se OUTRO também é, o que parece pouco funcional. Como havíamos comentado anteriormente, após o critério para 9 ou 3, esse resultado pode ser usado de maneira recursiva, com o intuito de diminuir tanto o número quanto preciso, para que o problema se torne fácil.

Com o mesmo raciocínio usado para demonstrar os critérios de divisibilidade por 3 e 11 na base decimal, conseguimos os seguintes critérios para uma base b:

Teorema 17. Sejam $b \in \mathbb{N}$ e n escrito na base b. Temos:

(a) Seja d um divisor de $b - 1$. Então n é divisível por d se, e somente se, a soma dos seus dígitos é divisível por d.

(b) Um número n é divisível por $b + 1$ se, e somente se, a soma dos seus dígitos de ordem par subtraída dos dígitos de ordem ímpar é divisível por $b + 1$.

(c) Seja d um divisor de $b + 1$. Então n é divisível por d se, e somente se, a soma dos seus dígitos de ordem par subtraída dos dígitos de ordem ímpar é divisível por d.

4. A Resolução do Desafio: o Triunfo da Princesa Generosa

Para salvar o príncipe, é suficiente a Princesa Generosa dizer, ao Rei Maligno, os números $X = 100^2$, $Y = 100$ e $Z = 1$, pois nesse caso o número $aX + bY + cZ$ será a escrita do número $(abc)_{100}$.

Bibliografia

[1] DOMINGUES, H. H.(1991) *Fundamentos de Aritmética.* Atual Editora, São Paulo.

[2] SHOKRANIAN, S., SOARES, M. e GODINHO, H. (1999). *Teoria dos Números.* Editora UnB.

[3] SANTOS, J. P. O. (2003). *Introdução à Teoria dos Números. Coleção Matemática Universitária.* Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[4] MARTINEZ, F. B., MOREIRA, C. G., SALDANHA, N. e TENGAN, E. (2010) *Teoria dos Números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Projeto Euclides.* Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Autores: Ana Paula Chaves

Endereço: UNIVERSIDADE DE FEDERAL DE GOIÁS
Instituto de Matemática e Estatística
74.690-612 Goiânia, GO, Brasil
apchaves@ufg.br

Thiago Porto

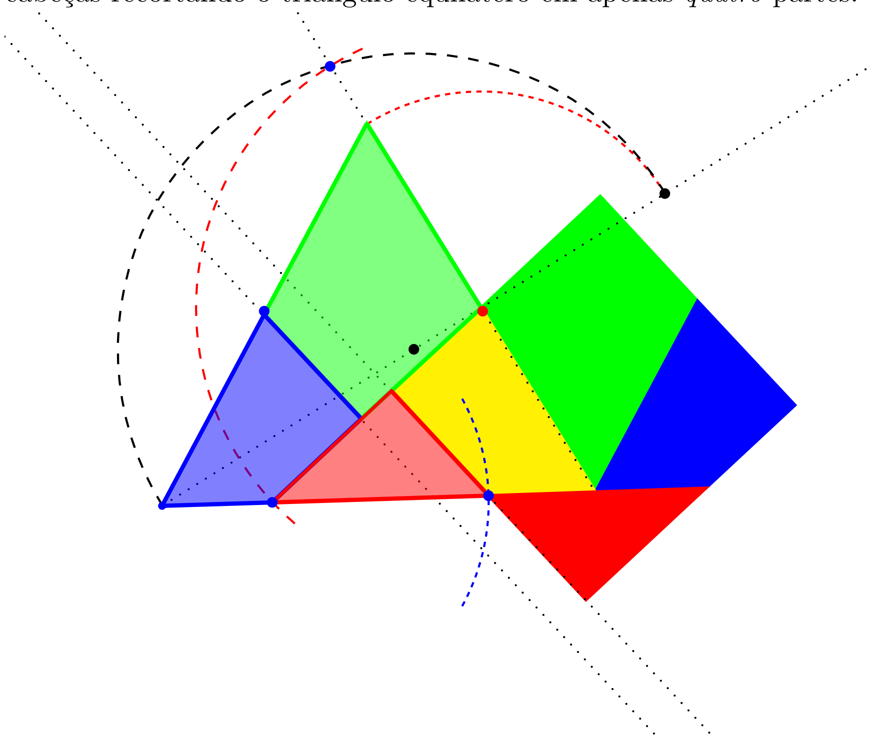
Endereço: UNIVERSIDADE DE FEDERAL DE GOIÁS
Departamento de Matemática - Campus de Catalão
74.704-020 Catalão, GO, Brasil
tpporto@ufg.br

Revista da Olimpíada - IME - UFG, nº 9, setembro de 2014, 57-61

Dudeney e um quebra-cabeças da Cantuária

José Hilário da Cruz

Resumo. O quebra-cabeças da Cantuária número 26 consiste em cortar um triângulo equilátero em partes que podem ser reorganizadas para formar um quadrado. Em 1903, Dudeney resolveu este quebra-cabeças recortando o triângulo equilátero em apenas *quatro* partes.



Nosso objetivo é descrever o método de Dudeney de uma forma quase visual. Além disso, evidenciamos que o conhecimento de matemática necessário é o do ensino fundamental.

1. Introdução.

Os contos da Cantuária é uma coleção de histórias escritas a partir de 1387 por Geoffrey Chaucer. Nessa época, todos os anos, Chaucer e um grupo de peregrinos realizava uma viagem de Southwark (Londres) até a Catedral de Cantuária e, a cada parada, um peregrino narrava um conto da coleção. Esta coleção de contos é muito rica, com representantes de todas as classes sociais, e os temas são igualmente variados. Os contos são recheados de acontecimentos curiosos, passagens pitorescas, citações clássicas, ensinamentos morais, relacionados à vida e aos costumes do século XIV na Inglaterra. Entre este contos haviam os chamados, por Dudeney, de quebra-cabeças da Cantuária [1].

2. O método.

Considere um triângulo equilátero ABC na figura 1. O ponto médio do lado BC e a reta AM_1, na figura 2.

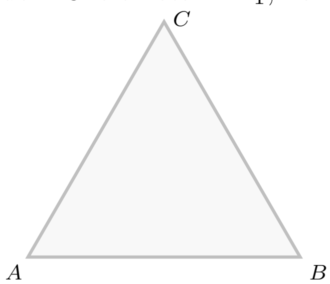


Figura 1: Triângulo Equilátero.

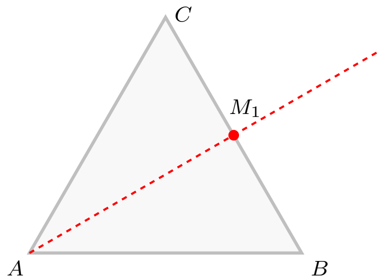


Figura 2: M_1 é o ponto médio de CB.

Determine o ponto E na reta AM_1, colocando a ponta seca do compasso no ponto M_1 e raio M_1C, veja a figura 3. Em seguida, na figura 4, O é o ponto médio de AE e desenhe a semi-circunferência de centro em O e raio OE. (Observe que AM_1 é a altura do triângulo ABC.)

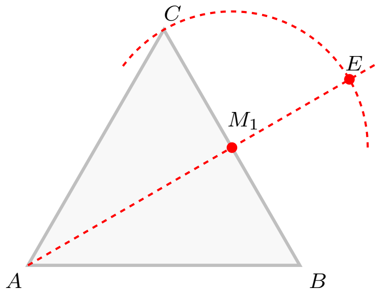


Figura 3: O ponto E é tal que $\overline{M_1E} = \overline{M_1C}$.

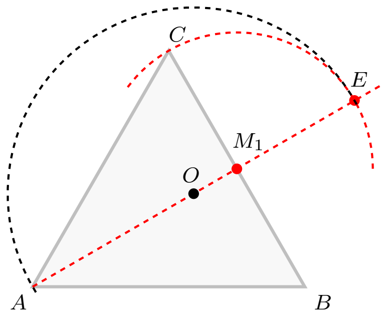


Figura 4: O é o ponto médio de AE.

Prolongando o lado BC determine o ponto G na semicircunferência de centro em O e raio OE, veja a figura 5. E na figura 6, marcamos o ponto J.

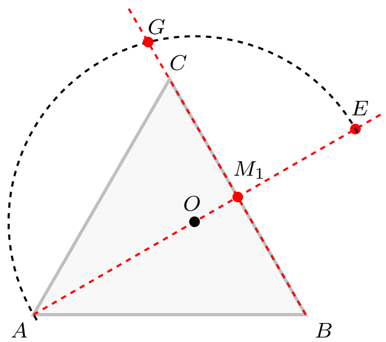


Figura 5: G é a interseção do arco AE com o prolongamento de BC.

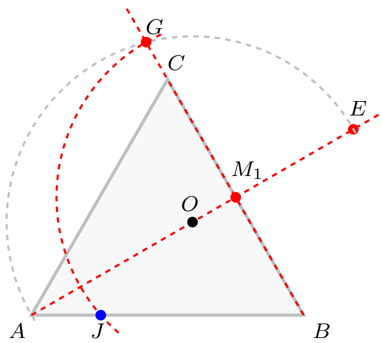


Figura 6: J é tal que $\overline{M_1J} = \overline{M_1G}$.

Observe que a área do triângulo ABC pode ser calculada por

$$\overline{AM}_1 \frac{\overline{BC}}{2} = \overline{AM}_1 \cdot \overline{M_1C} = \overline{AM}_1 \cdot \overline{M_1E} = \overline{M_1G}^2.$$

Logo, M_1G é o lado do quadrado com a mesma área do triângulo ABC.

Assim, Dudeney marcou o ponto J em AB centrando o compasso em M_1 e raio M_1G. O primeiro corte será no segmento JM_1, veja a figura 7. Na figura 8, marcamos o ponto K no lado AB tal que o comprimento de JK seja a metade do lado.

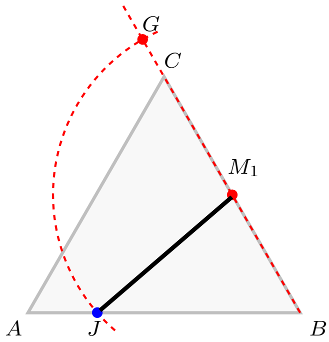


Figura 7: JM_1 é o 1º corte.

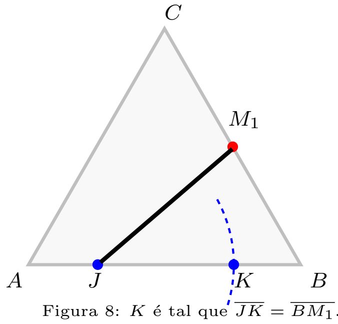


Figura 8: K é tal que $\overline{JK} = \overline{BM_1}$.

O segundo corte é por K perpendicular a JM_1, na figura 9 e o terceiro corte inicia-se no ponto médio M_2 também perpendicular a JM_1, veja a figura 10.

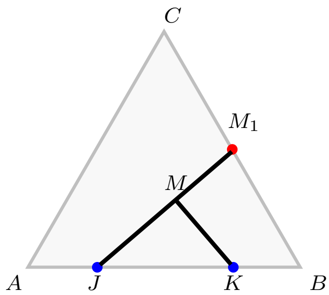


Figura 9: KM é o 2º corte.

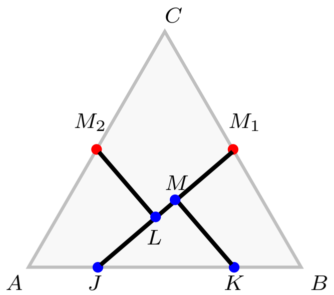


Figura 10: M_2L é o 3º corte.

Antes de realizar os cortes observamos, na figura 11, que os triângulos JKM e M_1M_2L são congruentes, logo $\overline{JL} = \overline{MM_1}$ e $\overline{LM_2} = \overline{MK}$.

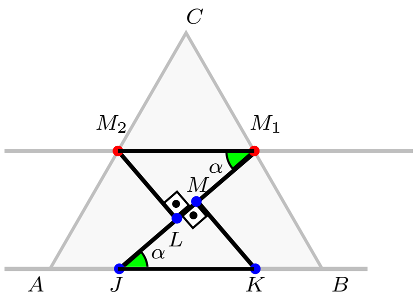


Figura 11: $\overline{JL} = \overline{MM_1}$ e $\overline{M_2L} = \overline{MK}$.

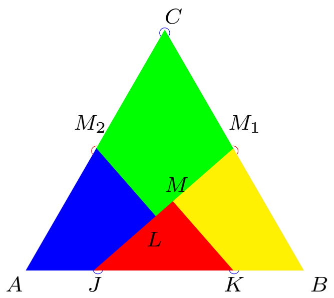


Figura 12: As quatro peças de Dudeney.

Reagrupando as peças de Dudeney temos o quadrado, na figura 14 (a direita).

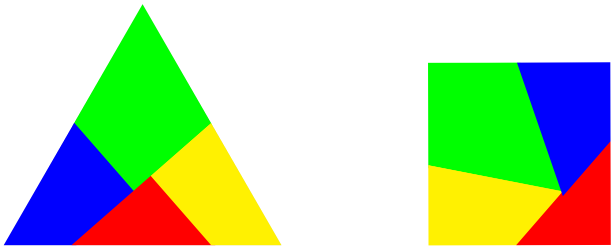
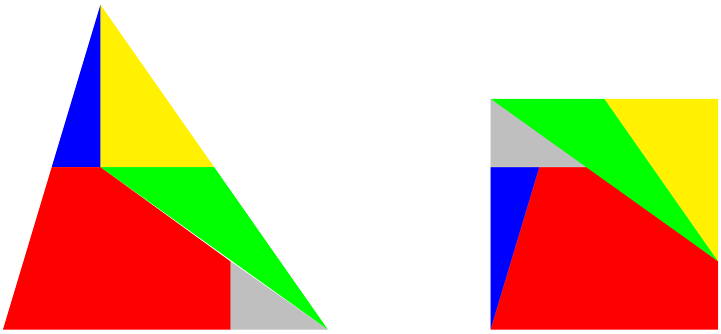


Figura 14: O triângulo e o quadrado com os cortes de Dudeney.

Exercício. As figuras, a seguir, mostram um triângulo acutângulo e um quadrado cobertos com as mesmas peças. Identifique e justifique o método usado para obter as peças recortando o triângulo.



Observe que a reorganização das peças é obtida somente através de rotações e translações. Tente fazer o mesmo para um triângulo retângulo e para um obtusângulo.

Bibliografia

[1] Dudeney, Henry E., The Canterbury Puzzles and other Curious Problems, New York, E.P. Dutton and Company, 1908.

Autor: José Hilário da Cruz

Endereço: UNIVERSIDADE DE FEDERAL DE GOIÁS
Instituto de Matemática e Estatística
74.690-612 Goiânia, GO, Brasil
jhilario@ufg.br

Objetivo e Política Editorial

A Revista da Olimpíada tem como objetivo ser um veículo de difusão, principalmente, das Olimpíadas de Matemática do Estado de Goiás, promovidas pelo IME/UFG.

A Revista também está aberta a contribuições de pequenas matérias, subordinados à boa qualidade. O material submetido para a publicação deverá ser de interesse do Ensino Fundamental e Médio, estar bem redigido, em estilo claro, sem aridez, de forma que desperte o interesse do leitor.

Submissão e Aceite

Toda matéria submetida para publicação deve ser enviada ao Comitê Editorial. Matérias redigidas em TEX ou LaTEX podem ser submetidas por e-mail: `omeg@mat.ufg.br`. Se existirem ilustrações no trabalho submetido, estas devem ser encaminhadas, juntamente com o trabalho, e precisam estar em condições de serem reproduzidas, sem retoques. Além disso, cópias dos desenhos e ilustrações devem ser afixadas em espaços apropriados do texto, exibindo, dessa maneira, como deverá ficar a apresentação final do trabalho.

As referências bibliográficas devem ser colocadas no final do texto, em ordem alfabética, segundo as normas da ABNT.

As matérias submetidas para publicação serão analisadas pelos editores que poderão solicitar pareceres *ad hoc* e o autor receberá a resposta sobre sua matéria num prazo máximo de 120 dias.

Os autores que tiverem os trabalhos aceitos deverão transferir seus direitos autorais para o Instituto de Matemática e Estatística da UFG.